Задача 1. Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность, т.ч. $x_n > 0$.
Докажите, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{x_n + a} = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a > 0$.

Решение: (Наводящие соображения) По определению $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{x_n + a} = 0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N$

$$-\varepsilon < \frac{x_n - a}{x_n + a} < \varepsilon.$$

Так как $x_n + a > 0$, то $-\varepsilon(x_n + a) < x_n - a < \varepsilon(x_n + a)$.

Левая часть неравенства

$$-\varepsilon x_n - \varepsilon a < x_n - a,$$
$$(1-\varepsilon)a < (1+\varepsilon)x_n,$$
$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}a - a < x_n - a,$$
$$\frac{-2a\varepsilon}{1+\varepsilon} < x_n - a.$$

Правая часть неравенства

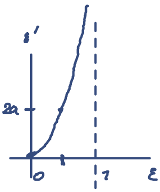
$$x_n - a < \varepsilon x_n + \varepsilon a,$$
$$(1-\varepsilon)x_n < (1+\varepsilon)a,$$

при условии $\varepsilon < 1$

$$x_n - a < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}a - a,$$
$$x_n - a < \frac{2a\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Поскольку $1+\varepsilon > 1-\varepsilon$, $\frac{-2a\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{-2a\varepsilon}{1+\varepsilon}$, получается, что $\forall\, 0 < \varepsilon < 1\ \exists N \in \mathbb{N}$ при $\forall n > N$

$$\left|\frac{x_n - a}{x_n + a}\right| < \frac{2a\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad \varepsilon' = \frac{2a\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2a + \varepsilon'}$$



(Формальное рассуждение) Заметим, что из $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{x_n + a} = 0$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon \quad \left(\left|\frac{x_n - a}{x_n + a}\right| < \frac{\varepsilon}{2a + \varepsilon} \right).$$

Тогда при фиксированном $\varepsilon > 0$ для $n > N_\varepsilon$

$$-\frac{\varepsilon}{2a+\varepsilon} < \frac{x_n - a}{x_n + a} < \frac{\varepsilon}{2a+\varepsilon}$$

$$-\frac{\varepsilon(x_n + a)}{2a+\varepsilon} < x_n - a < \frac{\varepsilon(x_n + a)}{2a+\varepsilon}$$

Левая часть неравенства:

$$-\frac{\varepsilon(x_n + a)}{2a+\varepsilon} < x_n - a \Leftrightarrow a - \frac{\varepsilon a}{2a+\varepsilon} < x_n\left(1 + \frac{\varepsilon}{2a+\varepsilon}\right) \Leftrightarrow \frac{2a^2}{2a+\varepsilon} < x_n \frac{2a+2\varepsilon}{2a+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 < x_n(2a + 2\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+\varepsilon} < x_n \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+\varepsilon} - a < x_n - a \Leftrightarrow \frac{-\varepsilon \cdot a}{a+\varepsilon} < x_n - a$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\varepsilon a}{a} < \frac{-\varepsilon a}{a+\varepsilon} < x_n - a \ \Rightarrow\ -\varepsilon < x_n - a.$$

Правая часть неравенства

$$x_n - a < \frac{\varepsilon(x_n + a)}{2a+\varepsilon} \Leftrightarrow x_n - \frac{\varepsilon x_n}{2a+\varepsilon} < a + \frac{\varepsilon a}{2a+\varepsilon} \Leftrightarrow x_n \frac{2a}{2a+\varepsilon} < \frac{2a^2+2a\varepsilon}{2a+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x_n < \frac{2a^2+2a\varepsilon}{2a+\varepsilon} \cdot \frac{2a+\varepsilon}{2a} = \frac{2a^2+2a\varepsilon}{2a} = a+\varepsilon \Rightarrow x_n - a < \varepsilon$$

Таким образом

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon \ (|x_n - a| < \varepsilon)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ◀

Задача 2: Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$
(т.е. если последовательность сходится, то и последовательность её средних арифметических сходится)

Решение: По определению из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \left(|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Тогда при фиксированном $\varepsilon>0$ для $n>N$

$$\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}-a\right| = \left|\frac{(x_1-a)+\ldots+(x_N-a)+\ldots+(x_n-a)}{n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|x_1-a|}{n}+\ldots+\frac{|x_N-a|}{n}+\ldots+\frac{|x_n-a|}{n} < \frac{C}{n}+\frac{\varepsilon(n-N)}{2n} < \frac{C}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Величина $\frac{C}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n>M$, где $M=M(\varepsilon)\in\mathbb{N}: M>N$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ \forall n>M\ \left(\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=a$ ◀