1. Пусть $V \subset k^n$, $W \subset k^m$ – аффинные многообразия, и
$$V \times W = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in k^{n+m} :$$
$$(x_1, \dots, x_n) \in V, (y_1, \dots, y_m) \in W\}.$$
Докажите, что $V \times W$ является аффинным многообразием в k^{n+m}.

2. Докажите, что
   (a) $\left\langle x + xy, y + xy, x^2, y^2 \right\rangle = \langle x, y \rangle$.
   (b) $\left\langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \right\rangle = \left\langle x^2 - 4, y^2 - 1 \right\rangle$.

3. Покажите, что $\mathbf{V}(x + xy, y + xy, x^2, y^2) = \mathbf{V}(x, y)$.

4. Покажите, что $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x^n, y^m)) = \langle x, y \rangle$ для любых n и m натуральных.

5. Пусть $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ – скрученная кубика. Докажите, что $\mathbf{I}(V) = \left\langle y - x^2, z - x^3 \right\rangle$. Докажите, что $y^2 - xz$ лежит в $\mathbf{I}(V)$, выразив этот многочлен через $y - x^2$ и $z - x^3$.

6. Докажите, что $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x - y)) = \langle x - y \rangle$.

7. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – кривая, заданная параметризацией (t, t^3, t^4). Докажите, что V – аффинное многообразие. Найдите $\mathbf{I}(V)$.

8. Поделите многочлен $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$ на упорядоченные наборы $F_{12} = (xy^2 - x, x - y^3)$ и $F_{21} = (x - y^3, xy^2 - x)$, используя deglex с $x > y$ и lex с $x > y$.

9. Вычислите остаток от деления многочлена $f = xy^2z^2 + xy - yz$ на $F = (x - y^2, y - z^3, z^2 - 1)$. *Мономиальный порядок выберите по своему усмотрению.*

10. Используя алгоритм деления докажите, что любой $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ можно записать в виде
$$f = a_1(y - x^2) + a_2(z - x^3) + r,$$
где r зависит только от x.

11. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – кривая, заданная параметризацией (t, t^m, t^n), где $n, m \geq 2$. Докажите, что V – аффинное многообразие. Найдите $\mathbf{I}(V)$.

12. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор с положительными координатами такой, что $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда для $x^\alpha, x^\beta \in M_n$ определим *взвешенный порядок*
$$x^\alpha >_u x^\beta \Leftrightarrow \langle u, \alpha \rangle > \langle u, \beta \rangle,$$
где $\langle u, \alpha \rangle := u_1\alpha_1 + \ldots + u_n\alpha_n$.
Докажите, что взвешенный порядок является мономиальным порядком на $k[x_1, \dots, x_n]$.

13. Пусть $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3[x, y, z]$, где

$$g_1 = xy^2 - xz + y,\ \ g_2 = xy - z^2,\ \ g_3 = x - yz^4.$$

Используя lex с $x > y > z$, приведите пример $g \in I$ такого, что $\operatorname{lt} g \notin \langle \operatorname{lt} g_1, \operatorname{lt} g_2, \operatorname{lt} g_3 \rangle$.

14. Пусть $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ – идеал такой, что $\langle \operatorname{lt} f_1, \ldots, \operatorname{lt} f_s \rangle$ строго меньше, чем $\langle \operatorname{lt}(I) \rangle$. Докажите, что существует $f \in I$ такой, что его остаток от деления на $f_1, \ldots, f_s$ является ненулевым.

15. Пусть I – идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$. Докажите, что набор $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ является базисом Гребнера тогда и только тогда, когда старший член любого многочлена из I делится на некоторый $\operatorname{lt} g_i$.