Лекция 5: Теория исключения

5.1 Теоремы об исключении и продолжении

Определение 5.1: Пусть $I < f_1, \dots, f_s > \subset k[x_1, \dots, x_n]$ — некоторый идеал. Тогда **ℓ-ым идеалом исключения** для I называется

$$I_\ell := I \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n].$$

(I_ℓ является идеалом в кольце $k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$).

Теорема 5.1: (об исключении) Пусть $I < f_1, \dots, f_s > \subset k[x_1, \dots, x_n]$ — идеал, набор G — его базис Трёбнера относительно $lex: x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Тогда для всех $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ пересечение

$$G_\ell := G \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$$

является базисом Трёбнера ℓ-го идеала исключения I_ℓ.

Доказательство: Пусть $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, по определению набор G_ℓ состоит из многочленов из идеала I, лежащих в $k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$, поэтому $G_\ell \subset I_\ell$. Тогда, если выполняется равенство

$$< lt(I_\ell) > = < lt(G_\ell) >,$$

то набор G_ℓ является базисом Трёбнера идеала I_ℓ. Включение $< lt(G_\ell) > \subset < lt(I_\ell) >$ очевидно. Нужно показать обратное: для этого достаточно, чтобы для многочлена $f \in I_\ell$ его старший член $lt f$ делился на некоторый $lt\, g$, где $g \in G_\ell$

Если $f \in I_\ell$, то он лежит и в I. По определению базиса Трёбнера найдётся $g \in G$, т.ч. $lt f$ делится на $lt g$. При этом многочлен $f \in k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$, а значит и $lt g \in k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$. Поскольку мы используем лексикографический мономиальный порядок с $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, то все остальные мономы g тоже не зависят от $x_1, \dots, x_\ell$, иначе они были бы старше чем $lt(g)$. Заключаем, что $g \in k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$, а следовательно и $g \in G_\ell$. ◀

Пример 5.1: Рассмотрим идеал $I = < x^2 + y + z - 1, x + y^2 + z - 1, x + y + z^2 - 1 > \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, его базис Трёбнера относительно $lex: x > y > z$ состоит

$$g_1 = x + y + z^2 - 1, \quad g_2 = y^2 - y - z^2 + z, \quad g_3 = 2yz^2 + z^4 - z^2, \quad g_4 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2$$

Согласно теореме 5.1

$$I_1 = I \cap \mathbb{C}[y, z] = < y^2 - y - z^2 + z,\ 2yz^2 + z^4 - z^2,\ z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 >,$$
$$I_2 = I \cap \mathbb{C}[z] = < z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 >.$$

Любой многочлен, получающийся исключением x и y, является кратным g_4. ◀

Напомним, что для идеала $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ его аффинное многообразие

$$\mathbb{V}(I) := \{ (a_1, \dots, a_n) \in k^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ для всех } f \in I \}$$

состоит из всевозможных решений системы $f_1 = \dots = f_s = 0$.
Пусть I_ℓ – ℓ-ый идеал исключения для I. Тогда точку $(a_{\ell+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I_\ell)$ будем называть частичным решением указанной системы. Если мы хотим решить систему, то нужно уметь продолжать частичное решение до полного

Пример 5.2: Рассмотрим идеал $I = \langle xy - 1, xz - 1 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ и систему

$$\begin{cases} xy = 1 \\ xz = 1 \end{cases}$$

Нетрудно найти, что $I_1 = \langle y - z \rangle$. Следовательно, множество частных решений состоит из точек (a, a), где $a \in \mathbb{C}$, они продолжаются до полных решений $(\frac{1}{a}, a, a)$, если $a \neq 0$.

Теорема 5.2 (об продолжении) Пусть $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$, для всех $1 \leq i \leq s$ образующие идеала записываются в виде

$$f_i = g_i(x_2, \dots, x_n)\, x_1^{N_i} + \text{члены, в которых степень } x_1 < N_i,$$

где $N_i \geq 0$ и $g_i \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ ненулевой. Тогда, если частное решение $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$, т.ч. $(a_2, \dots, a_n) \notin \mathbb{V}(g_1, \dots, g_s)$, то существует $a_1 \in \mathbb{C}$, для которого $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I)$.

Следствие: Пусть $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$, для некоторого $i \in \{1, \dots, s\}$

$$f_i = c\, x^N + \text{члены, в которых степень } x_1 < N_i,$$

где $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ и $N > 0$. Тогда, если $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$, то существует $a_1 \in \mathbb{C}$, т.ч. $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$.

5.2 Геометрия исключения

Рассмотрим отображение проекции

$$\pi_\ell : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-\ell}, \quad \pi_\ell(a_1, \dots, a_n) = (a_{\ell+1}, \dots, a_n).$$

Лемма 5.1: Пусть $I_l = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \cap \mathbb{C}[x_{l+1}, \dots, x_n]$ — l-ый идеал исключения идеала $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, а $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$. Тогда

$$\pi_l(V) \subset \mathbb{V}(I_l) \subset \mathbb{C}^{n-l}.$$

Доказательство: Выберем произвольный $f \in I_l$. В силу $I_l \subset I$ этот многочлен зануляется в $(a_1, \dots, a_n) \in V$. Более того, он зависит только от $x_{l+1}, \dots, x_n$, поэтому

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(\pi(a_1, \dots, a_n)) = 0,$$

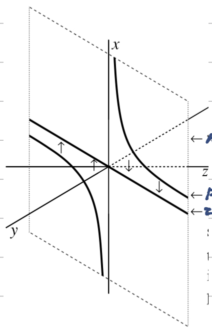
т.е. f зануляется во всех точках образа $\pi_l(V)$ ◀

Таким образом,

$$\pi_l(V) = \{(a_{l+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(I_l) : \exists a_1, \dots, a_l \in \mathbb{C} \text{ со свойством } (a_1, \dots, a_n) \in V\},$$

это множество всех частных решений, которые продолжаются до полных.

Пример 5.2 (продолжение) В этом случае $\mathbb{V}(I_1)$ — это прямая $y = z$ на плоскости $\mathbb{C}^2_{y,z}$, $\pi_1(V) = \{(a, a) \in \mathbb{C}^2 : a \neq 0\}$ не является алгебраическим многообразием (это полу-алгебраическое множество)



◀

Теорема 5.2': В условиях теоремы 5.2 имеется равенство

$$\mathbb{V}(I_1) = \pi_1(V) \cup \left(\mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) \cap \mathbb{V}(I_1)\right).$$

Пример 5.3: Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (y-z)\,x^2 + xy = 1 \\ (y-z)\,x^2 + xz = 1 \end{cases}$$

Можно показать, что $\langle xy - 1, xz - 1 \rangle = \langle (y-z)x^2 + xy - 1, (y-z)x^2 + xz - 1 \rangle =: I$.

Идеал исключения $I_1 = \langle y - z \rangle$ совпадает с $\langle g_1, g_2 \rangle = \langle y - z \rangle$, поэтому теорема о продолжении не даёт никакой информации о $\pi_1(V)$ в этом случае. ◀

Теорема 5.3: (о замыкании) Пусть $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $V = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$. Тогда

1) $\mathbb{V}(I_\ell)$ — это наименьшее аффинное многообразие, содержащее $\pi_\ell(V) \subset \mathbb{C}^{n-\ell}$.

2) Если $V \neq \varnothing$, то существует аффинное многообразие $W \subsetneqq \mathbb{V}(I_\ell)$, т.ч. $\mathbb{V}(I_\ell) - W \subset \pi_\ell(V)$.

Доказательство: Пункт 1) будет доказан позднее, когда мы познакомимся с теоремой Гильберта о нулях.

Пункт 2) докажем для случая $\ell = 1$. Рассмотрим разложение

$$\mathbb{V}(I_1) = \pi_1(V) \cup \left(\mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) \cap \mathbb{V}(I_1) \right)$$

из теоремы 5.2! Обозначим через W аффинное многообразие $\mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) \cap \mathbb{V}(I_1)$ (см. предложение 1.2) Из разложения следует, что $\mathbb{V}(I_1) - W \subset \pi_1(V)$. Если $W \neq \mathbb{V}(I_1)$, то утверждение доказано.

Если $W = \mathbb{V}(I_1)$, то можно показать, $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_s)$. Включение $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_s) \subset \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = V$. Для доказательства обратного включения рассмотрим $(a_1, \dots, a_n) \in V$. Каждый f_i-ый зануляется в этой точке, многочлены g_i-ые зануляются в $(a_2, \dots, a_n)$, т.к. $\pi_1(V) \subset \mathbb{V}(I_1) = W$. Следовательно, $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_s)$.

Итак $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\tilde{I})$, где $\tilde{I} = \langle f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_s \rangle$. Идеалы I и $\tilde{I}$ при этом могут не совпадать, соответствующие идеалы исключения I_1 и $\tilde{I}_1$ тоже могут не совпадать. Однако согласно пункту 1) $\mathbb{V}(I_1)$ и $\mathbb{V}(\tilde{I}_1)$ являются наименьшими многообразиями, содержащими $\pi_1(V)$. Поэтому $\mathbb{V}(I_1) = \mathbb{V}(\tilde{I}_1)$.

Запишем образующие идеала I в виде

$$f_i = g_i(x_2, \dots, x_n) x_1^{N_i} + \text{слагаемые со степенью } x_1 < N_i, \quad i = \overline{1, s}$$

где $N_i \geq 0$ и $g_i \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ ненулевые. Введём многочлены

$$\tilde{f}_i = f_i - g_i x_1^{N_i},$$

для $i \in \{1, s\}$ многочлен $\tilde{f}_i$ либо нулевой, либо имеет степень по x_1 строго меньше чем f_i. Заметим, что

$$\tilde{I} = \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s, g_1, \dots, g_s \rangle.$$