Лекция 8 Операции над идеалами

8.1 Сумма, произведение и пересечение идеалов

Определение 8.1: Пусть $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ - идеалы. **Суммой** I и J называется множество
$$I + J = \{f + g : (f \in I) \wedge (g \in J)\}.$$

Предложение 8.1: Пусть $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ - идеалы. Тогда их сумма $I+J$ является наименьшим идеалом в $k[x_1, \ldots, x_n]$, содержащим идеалы I и J. Более того, если $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ и $J = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$, то
$$I + J = \langle f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \rangle.$$
В частности,
$$\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \langle f_1 \rangle + \ldots + \langle f_r \rangle.$$

Доказательство: Заметим, что $0 = 0 + 0 \in I + J$. Предположим, что $h_1, h_2 \in I + J$, т.е. $h_1 = f_1 + g_1$ и $h_2 = f_2 + g_2$, где $f_1, f_2 \in I$, а $g_1, g_2 \in J$. Но тогда
$$h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2),$$
где выражение в первой скобке лежит в I, а во второй в J, поэтому $h_1 + h_2 \in I + J$. Рассмотрим $h \in I + J$ и $l \in k[x_1, \ldots, x_n]$, многочлен $h = f + g$, где $f \in I$ и $g \in J$. Произведение $l \cdot h = l \cdot (f + g) = l \cdot f + l \cdot g$ очевидно принадлежит $I + J$. Таким образом, сумма $I + J$ действительно является идеалом.

Предположим, что идеал H, т.ч. $I \subset H$ и $J \subset H$. Если $f \in I$ и $g \in J$, то $f, g \in H$. Значит $f + g \in H$, т.е. $I + J \subset H$. Любой идеал, содержащий I и J, содержит и сумму $I + J$, поэтому сумма $I + J$ - наименьший идеал, содержащий I и J.

Если $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $J = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$, то $\langle f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \rangle$ содержит I и J, поэтому $I + J \subset \langle f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \rangle$. Обратное включение очевидно. Следовательно,
$$\langle f_1, \ldots, f_r \rangle + \langle g_1, \ldots, g_s \rangle = \langle f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \rangle.$$

Теорема 8.1: Для идеалов $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ аффинное многообразие
$$\mathbb{V}(I + J) = \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J).$$

Доказательство: Идеалы $I, J \subset I + J$, поэтому по теореме 7.4 $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(I)$ и $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(J)$, т.е. $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$, а многочлен $h \in I+J$. Найдутся многочлены $f \in I$ и $g \in J$, т.ч. $h = f+g$. Тогда $h(x) = f(x)+g(x) = 0+0 = 0$. Следовательно, точка $x \in \mathbb{V}(I+J)$, т.е. $\mathbb{V}(I+J) \supset \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$. ◀

Как нам известно (см. предложение 1.2) для объединения аффинных многообразий

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r) \cup \mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) = \mathbb{V}(f_i g_j, \ 1 \le i \le r, \ 1 \le j \le s).$$

Определение 8.2: Пусть $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ - идеалы. Их **произведением** $I \cdot J$ называется идеал, порождённый всевозможными произведениями $f \cdot g$, где $f \in I$ и $g \in J$, т.е.

$$I \cdot J := \{ f_1 g_1 + \dots + f_k g_k : f_1, \dots, f_k \in I, \ g_1, \dots, g_k \in J, \text{ для } k \in \mathbb{N} \}.$$

Для $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ произведение

$$I \cdot J = \langle f_i g_j : \ 1 \le i \le r, \ 1 \le j \le s \rangle.$$

Теорема 8.2: Пусть $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ — идеалы. Тогда $\mathbb{V}(I \cdot J) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$.

Доказательство: Следует очевидным образом. ◀

Перейдём к рассмотрению пересечений идеалов. Очевидно, что $I \cap J$ является идеалом, если $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ - идеалы. Поскольку $fg \in I \cap J$, где $f \in I$ и $g \in J$, имеется включение $I \cdot J \subset I \cap J$. В общем случае обратного включения может не быть. Например, если $I = J = \langle x, y \rangle$, то произведение

$$I J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \subsetneq I \cap J = \langle x, y \rangle.$$

Если I - идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$, а многочлен $f(t) \in k[t]$, то будем обозначать через $f \cdot I$ идеал в $k[x_1, \dots, x_n, t]$, порождённый множеством $\{ f \cdot h : h \in I \}$.

Предложение 8.2:

1) Если $I = \langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$, то в $k[x_1, \dots, x_n, t]$ идеал
$$f(t) I = \langle f(t) p_1(x), \dots, f(t) p_r(x) \rangle.$$
2) Если $g(x, t) \in f(t) I$ и $a \in k$, то $g(x, a) \in I$.

Доказательство: 1) Если $g(x,t) \in f(t)I$, то он есть сумма слагаемых вида $h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x)$, где $h(x,t) \in k[x_1,\dots,x_n,t]$ и $p(x) \in I$. Запишем многочлен в виде

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} q_i(x) p_i(x),$$

где $q_i(x) \in k[x_1,\dots,x_n]$. Тогда справедливо представление

$$(8.1) \qquad h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x) = \sum_{i=1}^{r} h(x,t) q_i(x) f(t) p_i(x),$$

а значит, поскольку слагаемое $h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x) \in \langle f(t)p_1(x),\dots, f(t)p_r(x)\rangle$, то и многочлен $g(x,t) \in \langle f(t)\cdot p_1(x),\dots, f(t)\cdot p_r(x)\rangle$.

2) Очевидно после подстановки $a \in k$ в (8.1) ◀

Теорема 8.3: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ – идеалы. Тогда пересечение

$$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap k[x_1,\dots,x_n].$$

Доказательство: Пусть $f \in I \cap J$, тогда $tf \in t\cdot I$, т.к. $f \in I$, и $(1-t)f \in (1-t)J$, т.к. $f \in J$. Поскольку $f = t\cdot f + (1-t)f$, то $f \in tI + (1-t)J$. Заметив, что $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$, заключаем $f \in tI + (1-t)J \cap k[x_1,\dots,x_n]$. Тем самым включение $I \cap J \subset tI + (1-t)J \cap k[x_1,\dots,x_n]$ доказано.

Обратно, пусть $f \in tI + (1-t)J \cap k[x_1,\dots,x_n]$, тогда многочлен

$$f(x) = g(x,t) + h(x,t),$$

где $g(x,t) \in tI$ и $h(x,t) \in (1-t)J$. Положим в этом равенстве $t=0$,

$$f(x) = g(x,0) + h(x,0) = 0 + h(x,0) = h(x,0),$$

где по утверждению 2) предложения 8.2 $h(x,0) \in J$. Аналогично, положив $t=1$,

$$f(x) = g(x,1) + h(x,1) = g(x,1) + 0 = g(x,1) \in I.$$

Таким образом, $f \in I \cap J$, т.е. $(tI + (1-t)J) \cap k[x_1,\dots,x_n] \subset I \cap J$. ◀

Теорема 8.3 даёт базу для алгоритмического вычисления пересечения идеалов $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$ и $J = \langle g_1,\dots,g_s\rangle$: нужно найти базис Грёбнера идеала

$$\langle tf_1,\dots, tf_r, (1-t)g_1,\dots,(1-t)g_s\rangle \subset k[x_1,\dots,x_n,t]$$

относительно lex: $t > x_{i_1} > \dots > x_{i_n}$. Те элементы базиса, которые не зависят от t, образуют базис идеала $I \cap J$.

Пример 8.1: Найдём пересечение $\langle x^2y\rangle \cap \langle xy^2\rangle \subset \mathbb{Q}[x,y]$. Для этого рассмотрим

$$tI + (1-t)J = \langle tx^2y, (1-t)xy^2\rangle = \langle tx^2y, txy^2 - xy^2\rangle$$

в кольце $k[x,y,t]$.

Вычислим $S_{12} = y\cdot tx^2y - x(txy^2 - xy^2) = x^2y^2$. Проверим, что набор $\{tx^2y, txy^2 - xy^2, x^2y^2\}$ образует базис Грёбнера относительно lex: $t > x > y$:

$$S_{13} = y\cdot tx^2y - t\cdot x^2y^2 = 0, \quad S_{23} = x(txy^2 - xy^2) - tx^2y^2 = x^2y^2 \to 0.$$

Следовательно, $\langle x^2y\rangle \cap \langle xy^2\rangle = \langle x^2y^2\rangle$. ◀

Определение 8.3: Пусть $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. **Наименьшим общим кратным** многочленов f и g называется многочлен $h := \mathrm{lcm}(f, g)$, если

1) f делит h, и g делит h;
2) h делит любой многочлен, который делится на f и g.

Например, $\mathrm{lcm}(x^2y, xy^2) = x^2y^2$. В общем случае, для $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ рассмотрим представления

$$f = c f_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{a_r} \quad \text{и} \quad g = c' g_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{b_s}$$

в виде степеней различных неприводимых многочленов. Некоторые f_i могут с точностью до ненулевого множителя из k совпадать с некоторыми g_j-ми. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого $l \in \{1, \dots, \min(r, s)\}$ $f_i = a_i g_i$, где $a_i \in k - \{0\}$, при $1 \le i \le l$; а для $i, j > l$ отношение $\frac{f_i}{g_j} \notin k$. Тогда

$$(8.1) \qquad \mathrm{lcm}(f, g) = f_1^{\max(a_1, b_1)} \cdots f_l^{\max(a_l, b_l)} \cdot g_{l+1}^{b_{l+1}} \cdot \ldots \cdot g_s^{b_s} \cdot f_{l+1}^{a_{l+1}} \cdot \ldots \cdot f_r^{a_r}.$$

Если у f и g нет общих множителей, то $\mathrm{lcm}(f, g) = f \cdot g$.

Предложение 8.3: Если $I = \langle f\rangle$ и $J = \langle g\rangle$ — главные идеалы в $k[x_1, \dots, x_n]$, то пересечение $I \cap J = \langle h\rangle$, где $h = \mathrm{lcm}(f, g)$, т.е. тоже является главным идеалом.

Доказательство: Пусть $h = \mathrm{lcm}(f, g)$, тогда, если многочлен $p \in \langle f\rangle \cap \langle g\rangle$, то он делится на f и g, а значит p делится на h, т.е. $p \in \langle h\rangle$. Следовательно, $\langle f\rangle \cap \langle g\rangle \subset \langle h\rangle$.

Обратно, очевидно, что, если $h = \mathrm{lcm}(f, g)$, то $h \in \langle f\rangle$ и $h \in \langle g\rangle$. Таким образом, $\langle h\rangle \subset \langle f\rangle \cap \langle g\rangle$. ◀

Чтобы найти $\mathrm{lcm}(f, g)$ нужно вычислить пересечение $\langle f\rangle \cap \langle g\rangle$ — любая образующая этого главного идеала и будет $\mathrm{lcm}(f, g)$

Предложение 8.4: Для $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ их наибольший общий делитель

$$\gcd(f, g) = \frac{f \cdot g}{\mathrm{lcm}(f, g)}.$$

Доказательство: Заметим, что в силу разложения f, g в произведение степеней неприводимых множителей и соотношения (8.1), справедливо соотношение
$$\mathrm{lcm}(f,g)\cdot \gcd(f,g) = f\cdot g.$$ ◀

Теорема 8.4: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ — идеалы. Тогда $\mathbb{V}(I\cap J) = \mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$.

Доказательство: Пусть точка $x\in\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$, тогда $x\in\mathbb{V}(I)$ или $x\in\mathbb{V}(J)$, т.е. $f(x)=0$ для всех $f\in I$ или $f(x)=0$ для всех $f\in J$. Очевидно, что тогда $f(x)=0$ для всех $f\in I\cap J$, значит $x\in\mathbb{V}(I\cap J)$. Таким образом, $\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)\subset\mathbb{V}(I\cap J)$.

Обратно, мы знаем, что $I\cdot J\subset I\cap J$. Тогда $\mathbb{V}(I\cap J)\subset\mathbb{V}(I\cdot J) = \mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$ по теореме 8.2. ◀

Предложение 8.5: Если I, J — идеалы, то $\sqrt{I\cap J} = \sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.

Доказательство: Если $f\in\sqrt{I\cap J}$, то для некоторого целого $m\geq 1$ степень $f^m\in I\cap J$. Так как $f^m\in I$, то $f\in\sqrt{I}$. Аналогично $f\in\sqrt{J}$. Поэтому $\sqrt{I\cap J}\subset\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.

Обратно, пусть $f\in\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$, тогда существуют целые $m\geq 1$ и $p\geq 1$, т.ч. $f^m\in I$ и $f^p\in J$. Степень $f^{m+p} = f^m\cdot f^p\in I\cap J$, поэтому $f\in\sqrt{I\cap J}$. ◀

8.2 Замыкание по Зарискому и частное идеалов

Заметим, что для множества $S\subset k^n$ (необязательно аффинного многообразия)
$$\mathbb{I}(S) := \{f\in k[x_1,\dots,x_n] : f(a_1,\dots,a_n)=0 \text{ для всех } (a_1,\dots,a_n)\in S\}$$
является радикальным идеалом. Образ $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ является аффинным многообразием.

Предложение 8.6: Для $S\subset k^n$ аффинное многообразие $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ является наименьшим аффинным многообразием, содержащим множество S, т.е., если $W\subset k^n$ — аффинное многообразие, содержащее S, то $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))\subset W$.

Доказательство: Пусть $S\subset W$, тогда $\mathbb{I}(W)\subset\mathbb{I}(S)$, и $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))\subset\mathbb{V}(\mathbb{I}(W))$. Но, если W - аффинное многообразие, то $\mathbb{V}(\mathbb{I}(W)) = W$. ◀

Определение 8.4' Замыкание по Зарискому подмножества аффинного пространства — — это наименьшее аффинное многообразие, содержащее это подмножество, т.е., если $S\subset k^n$, то замыкание по Зарискому $\overline{S} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$.

Так как $S\subset\overline{S}$, то $\mathbb{I}(\overline{S})\subset\mathbb{I}(S)$. Если $f\in\mathbb{I}(S)$, то $S\subset\mathbb{V}(f)$, значит $S\subset\overline{S}\subset\mathbb{V}(f)$. Но тогда и $f\in\mathbb{I}(\overline{S})$, таким образом $\mathbb{I}(\overline{S})\subset\mathbb{I}(S)$. Итак, $\mathbb{I}(S) = \mathbb{I}(\overline{S})$