Лекция 8 Операции над идеалами

8.1 Сумма, произведение и пересечение идеалов

Определение 8.1: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ - идеалы. **Суммой** I и J называется множество
$$I + J = \{ f + g : (f \in I) \wedge (g \in J)\}.$$

Предложение 8.1: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ - идеалы. Тогда их сумма $I+J$ является наименьшим идеалом в $k[x_1,\dots,x_n]$, содержащим идеалы I и J. Более того, если $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$ и $J = \langle g_1,\dots,g_s\rangle$, то
$$I + J = \langle f_1,\dots,f_r, g_1,\dots,g_s\rangle.$$
В частности,
$$\langle f_1,\dots,f_r\rangle = \langle f_1\rangle + \dots + \langle f_r\rangle.$$

Доказательство: Заметим, что $0 = 0 + 0 \in I + J$. Предположим, что $h_1, h_2 \in I+J$, т.е. $h_1 = f_1 + g_1$ и $h_2 = f_2 + g_2$, где $f_1, f_2 \in I$, а $g_1, g_2 \in J$. Но тогда
$$h_1 + h_2 = (f_1+f_2) + (g_1+g_2),$$
где выражение в первой скобке лежит в I, а во второй в J, поэтому $h_1 + h_2 \in I+J$. Рассмотрим $h \in I+J$ и $\ell \in k[x_1,\dots,x_n]$, многочлен $h = f+g$, где $f \in I$ и $g \in J$. Произведение $\ell\cdot h = \ell\cdot(f+g) = \ell\cdot f + \ell\cdot g$ очевидно принадлежит $I+J$. Таким образом, сумма $I+J$ действительно является идеалом.

Предположим, что идеал H, т.ч. $I \subset H$ и $J \subset H$. Если $f \in I$ и $g \in J$, то $f, g \in H$. Значит $f + g \in H$, т.е. $I + J \subset H$. Любой идеал, содержащий I и J, содержит и сумму $I+J$, поэтому сумма $I+J$ - наименьший идеал, содержащий I и J.

Если $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$, $J = \langle g_1,\dots,g_s\rangle$, то $\langle f_1,\dots,f_r, g_1,\dots,g_s\rangle$ содержит I и J, поэтому $I + J \subset \langle f_1,\dots,f_r, g_1,\dots,g_s\rangle$. Обратное включение очевидно. Следовательно,
$$\langle f_1,\dots,f_r\rangle + \langle g_1,\dots,g_s\rangle = \langle f_1,\dots,f_r, g_1,\dots,g_s\rangle.$$

Теорема 8.1: Для идеалов $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ аффинное многообразие
$$\mathbb{V}(I+J) = \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J).$$

Доказательство: Идеалы $I, J \subset I+J$, поэтому по теореме 7.4 $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(I)$ и $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(J)$, т.е. $\mathbb{V}(I+J) \subset \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$, а многочлен $h \in I+J$. Найдутся многочлены $f \in I$ и $g \in J$, т.ч. $h = f+g$. Тогда $h(x) = f(x)+g(x) = 0+0=0$. Следовательно, точка $x \in \mathbb{V}(I+J)$, т.е. $\mathbb{V}(I+J) \supset \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$. ◀

Как нам известно (см. предложение 1.2) для объединения аффинных многообразий

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r) \cup \mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) = \mathbb{V}(f_i g_j,\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s).$$

Определение 8.2: Пусть $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ – идеалы. Их **произведением** $I \cdot J$ называется идеал, порождённый всевозможными произведениями $f \cdot g$, где $f \in I$ и $g \in J$, т.е.

$$I \cdot J := \{ f_1 g_1 + \dots + f_k g_k : f_1, \dots, f_k \in I,\ g_1, \dots, g_k \in J, \text{ для } k \in \mathbb{N} \}.$$

Для $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ произведение

$$I \cdot J = \langle f_i g_j : 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s \rangle.$$

Теорема 8.2: Пусть $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ – идеалы. Тогда $\mathbb{V}(I \cdot J) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$.

Доказательство: Следует очевидным образом. ◀

Перейдём к рассмотрению пересечений идеалов. Очевидно, что $I \cap J$ является идеалом, если $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ – идеалы. Поскольку $fg \in I \cap J$, где $f \in I$ и $g \in J$, имеется включение $I \cdot J \subset I \cap J$. В общем случае обратного включения может не быть. Например, если $I = J = \langle x, y \rangle$, то произведение

$$I J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \subsetneq I \cap J = \langle x, y \rangle.$$

Если I – идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$, а многочлен $f(t) \in k[t]$, то будем обозначать через $f \cdot I$ идеал в $k[x_1, \dots, x_n, t]$, порождённый множеством $\{ f \cdot h : h \in I \}$.

Предложение 8.4:

1) Если $I = \langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$, то в $k[x_1, \dots, x_n, t]$ идеал
$$f(t) I = \langle f(t) p_1(x), \dots, f(t) p_r(x) \rangle.$$
2) Если $g(x, t) \in f(t) I$ и $a \in k$, то $g(x, a) \in I$.

Доказательство: 1) Если $g(x,t) \in f(t)I$, то он есть сумма слагаемых вида $h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x)$, где $h(x,t)\in k[x_1,\dots,x_n,t]$ и $p(x)\in I$. Запишем многочлен в виде

$$p(x)=\sum_{i=1}^{r} q_i(x)p_i(x),$$

где $q_i(x)\in k[x_1,\dots,x_n]$. Тогда справедливо представление

$$h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x) = \sum_{i=1}^{r} h(x,t)q_i(x)f(t)p_i(x), \tag{8.1}$$

а значит, поскольку слагаемое $h(x,t)\cdot f(t)\cdot p(x)\in \langle f(t)p_1(x),\dots,f(t)p_r(x)\rangle$, то и многочлен $g(x,t)\in\langle f(t)\cdot p_1(x),\dots,f(t)\cdot p_r(x)\rangle$.

2) Очевидно после подстановки $a\in k$ в (8.1) ◀

Теорема 8.3: Пусть $I,J\subset k[x_1,\dots,x_n]$ – идеалы. Тогда пересечение

$$I\cap J = (tI+(1-t)J)\cap k[x_1,\dots,x_n].$$

Доказательство: Пусть $f\in I\cap J$, тогда $tf\in t\cdot I$, т.к. $f\in I$, и $(1-t)f\in(1-t)J$, т.к. $f\in J$. Поскольку $f=t\cdot f+(1-t)f$, то $f\in tI+(1-t)J$. Заметив, что $I,J\subset k[x_1,\dots,x_n]$, заключаем $f\in tI+(1-t)J\cap k[x_1,\dots,x_n]$. Тем самым включение $I\cap J\subset tI+(1-t)J\cap k[x_1,\dots,x_n]$ доказано.

Обратно, пусть $f\in tI+(1-t)J\cap k[x_1,\dots,x_n]$, тогда многочлен

$$f(x)=g(x,t)+h(x,t),$$

где $g(x,t)\in tI$ и $h(x,t)\in(1-t)J$. Положим в этом равенстве $t=0$,

$$f(x)=g(x,0)+h(x,0)=0+h(x,0)=h(x,0),$$

где по утверждению 2) предложения 8.4 $h(x,0)\in J$. Аналогично, положив $t=1$,

$$f(x)=g(x,1)+h(x,1)=g(x,1)+0=g(x,1)\in I.$$

Таким образом, $f\in I\cap J$, т.е. $(tI+(1-t)J)\cap k[x_1,\dots,x_n]\subset I\cap J$. ◀

Теорема 8.3 даёт базу для алгоритмического вычисления пересечения идеалов $I=\langle f_1,\dots,f_r\rangle$ и $J=\langle g_1,\dots,g_s\rangle$: нужно найти базис Грёбнера идеала

$$\langle tf_1,\dots,tf_r,\ (1-t)g_1,\dots,(1-t)g_s\rangle\subset k[x_1,\dots,x_n,t]$$

относительно lex: $t>x_{i_1}>\dots>x_{i_n}$. Те элементы базиса, которые не зависят от t, образуют базис идеала $I\cap J$.

Пример 8.1: Найдём пересечение $\langle x^2y\rangle\cap\langle xy^2\rangle\subset\mathbb{Q}[x,y]$. Для этого рассмотрим

$$tI+(1-t)J=\langle tx^2y,\ (1-t)xy^2\rangle=\langle tx^2y,\ txy^2-xy^2\rangle$$

в кольце $k[x,y,t]$.

Вычислим $S_{12} = y \cdot tx^2y - x(txy^2 - xy^2) = x^2y^2$. Проверим, что набор $\{tx^2y, txy^2 - xy^2, x^2y^2\}$ образует базис Грёбнера относительно lex: $t > x > y$:

$$S_{13} = y \cdot tx^2y - t \cdot x^2y^2 = 0, \quad S_{23} = x(txy^2 - xy^2) - tx^2y^2 = x^2y^2 \to 0.$$

Следовательно, $\langle x^2y \rangle \cap \langle xy^2 \rangle = \langle x^2y^2 \rangle$. ◀

Определение 8.3: Пусть $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. **Наименьшим общим кратным** многочленов f и g называется многочлен $h := \operatorname{lcm}(f, g)$, если

1) f делит h, и g делит h;
2) h делит любой многочлен, который делится на f и g.

Например, $\operatorname{lcm}(x^2y, xy^2) = x^2y^2$. В общем случае, для $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ рассмотрим представления

$$f = c f_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{a_r} \quad \text{и} \quad g = c' g_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{b_s}$$

в виде степеней различных неприводимых многочленов. Некоторые f_i могут с точностью до ненулевого множителя из k совпадать с некоторыми g_j-ми. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого $l \in \{1, \dots, \min(r,s)\}$ $f_i = a_i g_i$, где $a_i \in k - \{0\}$, при $1 \le i \le l$; а для $i, j > l$ отношение $\frac{f_i}{g_j} \notin k$. Тогда

$$(8.1) \qquad \operatorname{lcm}(f, g) = f_1^{\max(a_1, b_1)} \cdots f_l^{\max(a_l, b_l)} \cdot g_{l+1}^{b_{l+1}} \cdot \ldots \cdot g_s^{b_s} \cdot f_{l+1}^{a_{l+1}} \cdot \ldots \cdot f_r^{a_r}.$$

Если у f и g нет общих множителей, то $\operatorname{lcm}(f, g) = f \cdot g$.

Предложение 8.5: Если $I = \langle f \rangle$ и $J = \langle g \rangle$ — главные идеалы в $k[x_1, \dots, x_n]$, то пересечение $I \cap J = \langle h \rangle$, где $h = \operatorname{lcm}(f, g)$, т.е. тоже является главным идеалом.

Доказательство: Пусть $h = \operatorname{lcm}(f, g)$, тогда, если многочлен $p \in \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$, то он делится на f и g, а значит p делится на h, т.е. $p \in \langle h \rangle$. Следовательно, $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle \subset \langle h \rangle$.

Обратно, очевидно, что, если $h = \operatorname{lcm}(f, g)$, то $h \in \langle f \rangle$ и $h \in \langle g \rangle$. Таким образом, $\langle h \rangle \subset \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$. ◀

Чтобы найти $\operatorname{lcm}(f, g)$ нужно вычислить пересечение $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle$ — любая образующая этого главного идеала и будет $\operatorname{lcm}(f, g)$

Предложение 8.6: Для $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ их наибольший общий делитель

$$\gcd(f, g) = \frac{f \cdot g}{\operatorname{lcm}(f, g)}.$$

Доказательство: Заметим, что в силу разложения f, g в произведение степеней неприводимых множителей и соотношения (8.1), справедливо соотношение
$$\operatorname{lcm}(f,g)\cdot\gcd(f,g)=f\cdot g.$$
◀

Теорема 8.4: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ – идеалы. Тогда $\mathbb{V}(I\cap J)=\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$.

Доказательство: Пусть точка $x\in\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$, тогда $x\in\mathbb{V}(I)$ или $x\in\mathbb{V}(J)$, т.е. $f(x)=0$ для всех $f\in I$ или $f(x)=0$ для всех $f\in J$. Очевидно, что тогда $f(x)=0$ для всех $f\in I\cap J$, значит $x\in\mathbb{V}(I\cap J)$. Таким образом, $\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)\subset\mathbb{V}(I\cap J)$.

Обратно, мы знаем, что $I\cdot J\subset I\cap J$. Тогда $\mathbb{V}(I\cap J)\subset\mathbb{V}(I\cdot J)=\mathbb{V}(I)\cup\mathbb{V}(J)$ по теореме 8.2. ◀

Предложение 8.7: Если I, J – идеалы, то $\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.

Доказательство: Если $f\in\sqrt{I\cap J}$, то для некоторого целого $m\geq 1$ степень $f^m\in I\cap J$. Так как $f^m\in I$, то $f\in\sqrt{I}$. Аналогично $f\in\sqrt{J}$. Поэтому $\sqrt{I\cap J}\subset\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.

Обратно, пусть $f\in\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$, тогда существуют целые $m\geq 1$ и $p\geq 1$, т.ч. $f^m\in I$ и $f^p\in J$. Степень $f^{m+p}=f^m\cdot f^p\in I\cap J$, поэтому $f\in\sqrt{I\cap J}$. ◀

8.2 Замыкание по Зарискому и частное идеалов

Заметим, что для множества $S\subset k^n$ (необязательно аффинного многообразия)
$$\mathbb{I}(S):=\{f\in k[x_1,\dots,x_n]:\ f(a_1,\dots,a_n)=0 \text{ для всех } (a_1,\dots,a_n)\in S\}$$
является радикальном идеалом. Образ $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ является аффинным многообразием.

Предложение 8.8: Для $S\subset k^n$ аффинное многообразие $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ является наименьшим аффинным многообразием, содержащим множество S, т.е., если $W\subset k^n$ – аффинное многообразие, содержащее S, то $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))\subset W$.

Доказательство: Пусть $S\subset W$, тогда $\mathbb{I}(W)\subset\mathbb{I}(S)$, и $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))\subset\mathbb{V}(\mathbb{I}(W))$. Но, если W - аффинное многообразие, то $\mathbb{V}(\mathbb{I}(W))=W$. ◀

Определение 8.4' **Замыкание по Зарискому** подмножества аффинного пространства – – это наименьшее аффинное многообразие, содержащее это подмножество; т.е., если $S\subset k^n$, то замыкание по Зарискому $\overline{S}=\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$.

Так как $S\subset\overline{S}$, то $\mathbb{I}(\overline{S})\subset\mathbb{I}(S)$. Если $f\in\mathbb{I}(S)$, то $S\subset\mathbb{V}(f)$, значит $S\subset\overline{S}\subset\mathbb{V}(f)$. Но тогда и $f\in\mathbb{I}(\overline{S})$, таким образом $\mathbb{I}(\overline{S})\subset\mathbb{I}(S)$. Итак, $\mathbb{I}(S)=\mathbb{I}(\overline{S})$

Теорема 8.5: Пусть k - алгебраически замкнутое поле, $V = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s) \subset k^n$ и $\pi_l : k^n \to k^{n-l}$ – проекция на последние $n-l$ координат. Если $I_l = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$, то $\mathbb{V}(I_l) = \overline{\pi_l(V)}$.

Доказательство: Покажем, что $\mathbb{V}(I_l) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(\pi_l(V)))$. Мы знаем, что $\pi_l(V) \subset \mathbb{V}(I_l)$ (лемма 5.1). Многообразие $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\pi_l(V))) \subset \mathbb{V}(I_l)$, т.к. $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\pi_l(V)))$ – наименьшее аффинное многообразие, содержащее $\pi_l(V)$.

Теперь предположим $f \in \mathbb{I}(\pi_l(V))$, значит $f(a_{l+1}, \ldots, a_n) = 0$ для всех $(a_{l+1}, \ldots, a_n) \in \pi_l(V)$. Поскольку f лежит и в $k[x_1, \ldots, x_n]$, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $(a_1, \ldots, a_n) \in V$. Тогда по теореме Гильберта о нулях для некоторого целого $N \geq 1$ степень $f^N \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Многочлен $f \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$, поэтому и $f^N \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$, значит

$$f^N \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n] = I_l.$$

Мы доказали, что $f \in \sqrt{I_l}$, т.е. $\mathbb{I}(\pi_l(V)) \subset \sqrt{I_l}$, а $\mathbb{V}(\sqrt{I_l}) \subset \mathbb{V}(\mathbb{I}(\pi_l(V)))$. Из равенства $\mathbb{V}(I_l) = \mathbb{V}(\sqrt{I_l})$ вытекает, что $\mathbb{V}(I_l) \subset \mathbb{V}(\mathbb{I}(\pi_l(V)))$. ◀

Предложение 8.9: Пусть V и W - аффинные многообразия, т.ч. $V \subset W$. Тогда многообразие $W = V \cup \overline{(W - V)}$.

Доказательство: Многообразие $W \supset W - V$, поэтому замыкание $\overline{W - V} \subset W$. Поскольку $V \subset W$, то $V \cup \overline{(W - V)} \subset W$.

Обратно, имеем $W = V \cup (W - V)$, т.к. $V \subset W$. В силу включения $W - V \subset \overline{W - V}$, многообразие $W \subset V \cup \overline{(W - V)}$. ◀

Определение 8.5: Пусть $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ - идеалы. Тогда их **частным** называется

$$I : J = \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] : fg \in I \text{ для всех } g \in J \}.$$

Пример 8.2: $\langle xz, yz \rangle : \langle z \rangle = \{ f \in k[x, y, z] : f \cdot z \in \langle xz, yz \rangle \} =$
$= \{ f \in k[x, y, z] : f \cdot z = Axz + Byz \} = \{ f \in k[x, y, z] : f = Ax + By \} = \langle x, y \rangle$. ◀

Предложение 8.10: Пусть $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ Тогда их частное $I : J$ является идеалом в $k[x_1, \ldots, x_n]$, содержащим I.

Доказательство: Если $f \in I$, то $fg \in I$ для всех $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, в частности и для всех $g \in J$, т.е. $f \in I : J$.

Остаётся доказать, что $I : J$ – идеал. Нулевой многочлен очевидно лежит в $I : J$

Пусть $f_1, f_2 \in I:J$, тогда для всех $g \in J$ произведения $f_1 g$ и $f_2 g$ лежат в I. Значит $(f_1+f_2)g$ тоже лежит в I, а $f_1+f_2 \in I:J$. Если $f \in I:J$ и $h \in k[x_1,\dots,x_n]$, то $f\cdot g \in I$ для всех $g \in J$ и $(fh)g \in I$, т.к. $hg \in J$. Тогда произведение $fh \in I:J$. ◀

Теорема 8.6: Пусть $I, J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ – идеалы. Тогда $\mathbb{V}(I:J) \supset \overline{\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)}$.
Более того, если k алгебраически замкнуто, а идеал I радикальный, то
$$\mathbb{V}(I:J) = \overline{\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)}.$$

Доказательство: Докажем, что $I:J \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))$. Пусть $f \in I:J$ и $x \in \mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)$. Произведение $fg \in I$ для всех $g \in J$. Так как $x \in \mathbb{V}(I)$, то $f(x)g(x)=0$ для всех $g \in J$. При этом $g(x) \neq 0$ для некоторого $g \in J$, т.к. $x \notin \mathbb{V}(J)$. Следовательно, $f(x)=0$ для всех $x \in \mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)$, т.е. $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))$. Откуда $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))) \subset \mathbb{V}(I:J)$.

Пусть теперь k - алгебраически замкнутое поле и $I=\sqrt{I}$. Рассмотрим $x \in \mathbb{V}(I:J)$, т.е., если $hg \in I$ для всех $g \in J$, то $h(x)=0$. Пусть многочлен $h \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))$. Если $g \in J$, то произведение hg зануляется на $\mathbb{V}(I)$, т.к. h зануляется на $\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)$, а g зануляется на $\mathbb{V}(J)$. Тогда по теореме Гильберта о нулях $hg \in \sqrt{I}$. Так как $I=\sqrt{I}$ произведение $hg \in I$ для всех $g \in J$. Следовательно, $h \in I:J$, т.е $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J)) \subset I:J$. Тогда имеем включение
$$\mathbb{V}(I:J) \subset \mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))).$$
◀

Следствие: Пусть $V, W \subset k^n$ – аффинные многообразия. Тогда
$$\mathbb{I}(V):\mathbb{I}(W) = \mathbb{I}(V-W).$$

Доказательство: Мы уже показали, что $I:J \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)-\mathbb{V}(J))$. Выбрав $I=\mathbb{I}(V)$ и $J=\mathbb{I}(W)$, получим вложение $\mathbb{I}(V):\mathbb{I}(W) \subset \mathbb{I}(V-W)$. Если $f \in \mathbb{I}(V-W)$, то для всякого $g \in \mathbb{I}(W)$ произведение fg зануляется на V, т.е. $fg \in \mathbb{I}(V)$. Тогда по определению $f \in \mathbb{I}(V):\mathbb{I}(W)$. ◀

Упражнение 8.1: Пусть $I, J, K \subset k[x_1,\dots,x_n]$ – идеалы. Докажите, что
1) $I : k[x_1,\dots,x_n] = I$.
2) $IJ \subset K \Leftrightarrow I \subset K:J$.
3) $I \subset J \Leftrightarrow I:J = k[x_1,\dots,x_n]$.

Упражнение 8.2: Пусть I, I_i, J, J_i и K – идеалы в $k[x_1,\dots,x_n]$, где $1 \le i \le r$. Докажите, что

1) $$\left(\bigcap_{i=1}^{r} I_i\right) : J = \bigcap_{i=1}^{r} (I_i : J).$$

2) $$I : \left(\sum_{i=1}^{r} J_i\right) = \bigcap_{i=1}^{r} (I : J_i).$$

3) $$(I:J):K = I:JK$$

Условимся писать $I:f$ вместо $I:\langle f\rangle$, тогда согласно п. 2) упражнения 8.2

$$I : \langle f_1, f_2, \dots, f_r\rangle = \bigcap_{i=1}^{r} (I : f_i).$$

Теорема 8.7: Пусть I – идеал, а g – многочлен в $k[x_1,\dots,x_n]$. Если $\{h_1,\dots h_p\}$ – это базис идеала $I \cap \langle g\rangle$, то $\{h_1/g, \dots, h_p/g\}$ – базис идеала $I:\langle g\rangle$.

Доказательство: Рассмотрим многочлен $a = bg$ из идеала $\langle g\rangle$. Тогда, если $f \in \langle h_1/g, \dots, h_p/g\rangle$, то

$$af = bgf \in \langle h_1, \dots, h_p\rangle = I \cap \langle g\rangle \subset I$$

Следовательно, $f \in I:\langle g\rangle$.

Обратно, пусть $f \in I:\langle g\rangle$. Тогда $fg \in I$, но поскольку $fg \in \langle g\rangle$, то произведение $fg \in I \cap \langle g\rangle = \langle h_1,\dots,h_p\rangle$. Значит для некоторых $r_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ произведение $fg = \sum r_i h_i$. Каждый $h_i \in \langle g\rangle$, поэтому все h_i/g – многочлены, и многочлен

$$f = \sum r_i \left(h_i/g\right)$$

лежит в $\langle h_1/g, \dots, h_p/g\rangle$. ◀

На этой теореме основан алгоритм вычисления базиса частного идеалов. Если $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$ и $J = \langle g_1,\dots,g_s\rangle = \langle g_1\rangle + \dots + \langle g_s\rangle$. Чтобы вычислить базис $I:J$, сперва нужно вычислить базис $I:\langle g_i\rangle$ для $i=1,\dots,s$, найдя базис $\langle f_1,\dots,f_r\rangle \cap \langle g_i\rangle$. Последнее можно сделать, вычислив базис Грёбнера идеала $\langle tf_1,\dots,tf_r, (1-t)g_i\rangle$ относительно lex с t старше всех x_i, а затем выбрав его элементы, не зависящие от t. Деление эти элементов на g_i даст базис идеала $I:\langle g_i\rangle$. Наконец, применив $s-1$ раз алгоритм нахождения пересечения идеалов, получим базис $I:J$ ($I:\langle g_1,g_2\rangle = (I:\langle g_1\rangle)\cap(I:\langle g_2\rangle)$, $I:\langle g_1,g_2,g_3\rangle = I:\langle g_1,g_2\rangle \cap I:\langle g_3\rangle$ и т.д.)