Лекция 9: Неприводимые многообразия

Определение 9.1: Аффинное многообразие $V \subset k^n$ называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде объединения двух аффинных многообразий, отличных от V (т.е., если $V = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 – аффинные многообразия, то $V_1 = V$ или $V_2 = V$).

Определение 9.2: Идеал $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ **простой** тогда и только тогда, когда из $fg \in I$ для $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ следует, что либо $f \in I$, либо $g \in I$.

Теорема 9.1: Пусть $V \subset k^n$ – аффинное многообразие. Тогда V неприводимо тогда и только тогда, когда идеал $\mathbb{I}(V)$ простой.

Доказательство: $(\Rightarrow)$ Пусть многообразие V неприводимо и произведение $fg \in \mathbb{I}(V)$. Рассмотрим аффинные многообразия $V_1 := V \cap \mathbb{V}(f)$ и $V_2 := V \cap \mathbb{V}(g)$. Тогда $V = V_1 \cup V_2$, т.к. для $x \in V$ либо $f(x) = 0$, либо $g(x) = 0$, т.е. либо $x \in \mathbb{V}(f)$, либо $x \in \mathbb{V}(g)$. Поскольку V неприводимое, то либо $V_1 = V$, либо $V_2 = V$. Если $V_1 = V$, то многочлен f зануляется на V, т.е. $f \in \mathbb{I}(V)$. Таким образом идеал $\mathbb{I}(V)$ простой.

$(\Leftarrow)$ Пусть теперь идеал $\mathbb{I}(V)$ простой и $V = V_1 \cup V_2$. Предполагая $V \neq V_1$, докажем, что $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V_2)$. Так как $V_2 \subset V$, то $\mathbb{I}(V) \subset \mathbb{I}(V_2)$. Поскольку $V_1 \subsetneq V$, то $\mathbb{I}(V) \subsetneq \mathbb{I}(V_1)$. Выберем $f \in \mathbb{I}(V_1) - \mathbb{I}(V)$ и $g \in \mathbb{I}(V_2)$. Тогда $fg \in \mathbb{I}(V)$, т.к. $V = V_1 \cup V_2$. В силу простоты идеала $\mathbb{I}(V)$ либо $f \in \mathbb{I}(V)$, либо $g \in \mathbb{I}(V)$. Многочлен $f \notin \mathbb{I}(V)$, поэтому многочлен $g \in \mathbb{I}(V)$. Таким образом, $\mathbb{I}(V_2) \subset \mathbb{I}(V)$, а значит $\mathbb{I}(V_2) = \mathbb{I}(V)$, и $V_2 = V$. ◀

Следствие: Пусть k – алгебраически замкнутое поле. Тогда отображения $\mathbb{I}$ и $\mathbb{V}$ определяют 1-1 соответствие неприводимыми многообразиями в k^n и простыми идеалами в $k[x_1, \dots, x_n]$.

Доказательство: Если идеал I простой, то из $f^n \in I$ для некоторого целого $n \geq 1$ следует, что $f \in I$. Значит всякий простой идеал является радикальным. ◀

Предложение 9.1: Пусть k – бесконечное поле, а многообразие $V \subset k^n$ задано параметрически

$$x_1 = f_1(t_1, \dots, t_m)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f_n(t_1, \dots, t_m),$$

где $f_1, \dots, f_n \in k[t_1, \dots, t_m]$. Тогда V неприводимо.

Доказательство: Рассмотрим отображение

$$F: k^m \to k^n,$$
$$F(t_1, \dots, t_m) = (f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, f_n(t_1, \dots, t_m)).$$

Многообразие V является замыканием по Зарискому образа $F(k^m)$. В частности, $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(F(k^m))$

Если $g\in k[x_1,\dots,x_n]$, то композиция $g\circ F\in k[t_1,\dots,t_m]$, т.к.

$$g\circ F = g(f_1(t_1,\dots,t_m),\dots,f_n(t_1,\dots,t_m)).$$

Поскольку k бесконечное и $\mathbb{I}(V)=\mathbb{I}(F(k^m))$, мы получаем

$$\mathbb{I}(V)=\{g\in k[x_1,\dots,x_n]:\ g\circ F=0\}$$

Пусть $gh\in\mathbb{I}(V)$. Очевидно, что $(gh)\circ F=(g\circ F)(h\circ F)$. Так как это произведение нулевой многочлен в $k[t_1,\dots,t_m]$, то либо $g\circ F$ нулевой, либо $h\circ F$ нулевой. Но тогда либо $g\in\mathbb{I}(V)$, либо $f\in\mathbb{I}(V)$. Значит идеал $\mathbb{I}(V)$ простой, а многообразие V неприводимое. ◀

Предложение 9.2: Пусть k бесконечное поле, а многообразие $V\subset k^n$ задано рациональной параметризацией

$$x_1=\frac{f_1(t_1,\dots,t_m)}{g_1(t_1,\dots,t_m)},$$
$$\vdots$$
$$x_n=\frac{f_n(t_1,\dots,t_m)}{g_n(t_1,\dots,t_m)},$$

где $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n\in k[t_1,\dots,t_m]$. Тогда многообразие V неприводимо.

Доказательство: См. Cox, Little & O'shea pp. 200-201. ◀

Как мы знаем точка $\{(a_1,\dots,a_n)\}\in k^n$ является аффинным многообразием, она задаётся параметризацией $f_i(t_1,\dots,t_m)=a_i$, $i=\overline{1,n}$. Это неприводимое многообразие, имеется равенство

$$I(\{a_1,\dots,a_n\})=\langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle.$$

Тогда идеал $I(\{a_1,\dots,a_n\})$ простой, если k бесконечное поле.

Определение 9.3: Идеал $I\subset k[x_1,\dots,x_n]$ называется **максимальным**, если $I\neq k[x_1,\dots,x_n]$ (т.е. идеал I **собственный**), и из вложения $I\subset J$, где J – идеал в $k[x_1,\dots,x_n]$, следует, что либо $I=J$, либо $J=k[x_1,\dots,x_n]$.

Предложение 9.3: Пусть k - произвольное поле. Тогда идеал

$$I=\langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle,\quad a_i\in k,\ i=\overline{1,n},$$

в $k[x_1,\dots,x_n]$ является максимальным.

Доказательство: Пусть идеал J содержит I, но не совпадает с ним. Тогда найдётся многочлен $f\in J$, т.ч. $f\notin I$. С помощью алгоритма деления мы можем записать f в виде $f=A_1(x_1-a_1)+\dots+A_n(x_n-a_n)+b$, где $b\in k$. Т.к. $f\notin I$, константа $b\neq 0$. При этом, поскольку $A_1(x_1-a_1)+\dots+A_n(x_n-a_n)\in I\subset J$

и $f \in J$, то $b = f - (A_1(x_1 - a_1) + \ldots + A_n(x_n - a_n)) \in J$. Значит т.к $b \neq 0$, то $1 = \frac{1}{b} \cdot b \in J$. Поэтому $J = k[x_1, \ldots, x_n]$. ◀

Так как $\mathbb{V}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$, то каждая точка $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ соответствует максимальному идеалу $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$. Обратное, если поле k не является алгебраически замкнутым. Так, максимальный идеал $\langle x^2 + 1 \rangle$ в кольце $\mathbb{R}[x]$ не соответствует ни какой точке из $\mathbb{R}$.

Предложение 9.4: Пусть k – произвольное поле. Тогда всякий максимальной идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$ является простым

Доказательство: Пусть $I \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$ не является простым. Пусть $fg \in I$, т.е. $f \notin I$ и $g \notin I$. Рассмотрим идеал $\langle f \rangle + I$, строго содержащий I, т.к. $f \notin I$. Если бы этот идеал совпадал с $k[x_1, \ldots, x_n]$, то $1 = cf + h$ для некоторых $c \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и $h \in I$. Умножив последнее равенство на g, мы получили бы $g = cfg + hg \in I$, т.е. противоречие с выбором g. Следовательно, $I + \langle f \rangle$ – собственный идеал, строго содержащий I, т.е. I не является максимальным ◀

Как мы видим из предложений 9.3 и 9.4, идеал $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ является простым и в случае конечного поля k.

Теорема 9.2: Пусть k алгебраически замкнутое поле. Тогда всякий максимальный идеал кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$ имеет вид $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$, где $a_j \in k$, $j = \overline{1, n}$.
(Эта теорема эквивалентна слабой теореме Гильберта о нулях)

Доказательство: Пусть $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ – максимальный идеал. Из слабой теоремы Гильберта о нулях следует, что $\mathbb{V}(I) \neq \varnothing$, т.к $I \neq k[x_1, \ldots, x_n]$. Поэтому некоторая точка $(a_1, \ldots, a_n)$ лежит в $\mathbb{V}(I)$. Каждый многочлен $f \in I$ зануляется в точке $(a_1, \ldots, a_n)$, значит $f \in \mathbb{I}(\{(a_1, \ldots, a_n)\})$, т.е.

$$I \subset \mathbb{I}(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n],$$

Так как идеал I является максимальным, то $I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ ◀

Следствие: Если k – алгебраически замкнутое поле. Тогда точки k^n находятся в 1-1 соответствии с максимальными идеалами в $k[x_1, \ldots, x_n]$.