2380а Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx \quad (q \neq 0).$$

► Сделав в интеграле замену $t = x^q$, получим $\frac{sgn(q)}{q}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p-q+1}{q}} \sin t\,dt$.

Нам нужно исследовать интеграл

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\sin t\,dt = \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha}\sin t\,dt}_{=: I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\sin t\,dt}_{=: I_2}.$$

При $t \to +0$ имеем $0 < t^{\alpha}\sin t \sim t^{\alpha+1}$, поэтому по признаку сравнения интеграл I_1 сходится (абсолютно) тогда и только тогда, когда $-(\alpha+1) < 1 \Leftrightarrow \alpha > -2$.

Интеграл I_2 по признаку Абеля-Дирихле сходится при $\alpha < 0$, поскольку $\sin t$ имеет ограниченную первообразную на $(0; +\infty)$, а функция $t^{\alpha} \to 0$ при $t \to +\infty$, монотонно убывая.

Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\sin t\,dt$ сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha \in (-2, 0)$.

Рассмотрим интеграл I_2, в силу оценки $|t^{\alpha}\sin t| \leq t^{\alpha}$ при $t \in [1; +\infty)$ этот интеграл по признаку сравнения сходится абсолютно при $\alpha < -1$. Пусть $\alpha \in [-1; 0)$, рассмотрим

$$\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{\alpha}(1 - \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\cos 2t\,dt,$$

первый интеграл расходится при $\alpha \geq -1$, а второй сходится по признаку Абеля-Дирихле при $\alpha < 0$. Поэтому $\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\sin^2 t\,dt$ расходится при $\alpha \in [-1; 0)$. Тогда из признака сравнения следует, что интеграл $\int_1^{+\infty} |t^{\alpha}\sin t|\,dt$ расходится при $\alpha \in [-1; 0)$

Таким образом, интеграл I_2 сходится абсолютно при $\alpha \in (-2, -1)$ и условно при $\alpha \in [-1; 0)$

Сводя все случаи вместе, получим, что исходный интеграл сходится абсолютно при

$$-2 < \alpha = \frac{p-q+1}{q} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{p+1}{q} < 0,$$

и сходится условно при

$$-1 \leq \alpha = \frac{p-q+1}{q} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{p+1}{q} < 1.$$