Демидович 2756а.

Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$$

на равномерную сходимость на множестве $(0, +\infty)$

▶ Для всякого $x \in (0; +\infty)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \text{ на } (0, +\infty).$$

Рассмотрим величину

$$r_n = \sup_{(0;+\infty)} \left|\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}\right| = \max_{(0;+\infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) = \frac{\pi}{2},$$

т. к. функция $\operatorname{arctg} nx$ возрастает на $(0, +\infty)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n \neq 0,$$

а значит $\operatorname{arctg} nx \underset{n\to+\infty}{\not\rightrightarrows} \frac{\pi}{2}$ на $(0; \frac{\pi}{2})$. ◀

Демидович 2756б.

Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$$

на равномерную сходимость на множестве $(0, +\infty)$

▶ Очевидно, что $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} x$ на $(0; +\infty)$

Рассмотрим величину

$$r_n = \sup_{(0;+\infty)} \left| x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} x \right| = \sup_{(0;+\infty)} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) =$$

$$= \sup_{(0,+\infty)} x \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \leq x \cdot \frac{1}{nx} \text{ для достаточно больших } x.$$

Поэтому $0 \leq r_n \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и значит

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \frac{\pi}{2} x \text{ на } (0; +\infty).$$ ◀