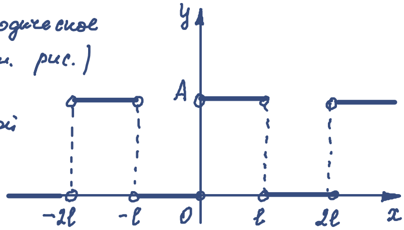
D2939 Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < 2l; \end{cases}$$

в ряд Фурье.

Решение: Рассмотрим $2l$-периодическое продолжение функции $f(x)$ (см. рис.)



Вспомним, что для T-периодической функции все её интегралы по интервалам длины T совпадают.

Поэтому коэффициенты Фурье для $2l$-периодического продолжения можно найти по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l A\,dx = \frac{Al}{l} = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l A\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{A}{l}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{l}x}{\frac{n\pi}{l}}\Bigg|_0^l = 0 - 0 = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l A\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{-A}{l}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{l}x}{\frac{n\pi}{l}}\Bigg|_0^l = \frac{A}{n\pi}\cdot\left((-1)^{n-1}+1\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{n\pi}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}.$$

Таким образом

$$f(x) \sim \frac{A}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x,$$

при этом

$$\frac{A}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2A}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ \frac{A}{2}, & x = l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases}$$