Д3657. Найти экстремум функции

$$z = x^2 + 12xy + 2y^2$$

при условии $4x^2 + y^2 = 25$.

Решение: Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 - \lambda(4x^2+y^2-25).$$

1) Решим систему

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0, \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0, \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12y - 8\lambda x = 0, \\ 12x + 4y - 2\lambda y = 0, \\ 4x^2 + y^2 - 25 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-8\lambda)x + 12y = 0, \\ -12x + (4-2\lambda)y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Заметим, что однородная линейная система

$$\begin{cases} (2-8\lambda)x + 12y = 0, \\ 12x + (4-2\lambda)y = 0, \end{cases}$$

имеет ненулевые решения, если

$$\det\begin{pmatrix} 1-4\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-4\lambda)(2-\lambda) - 36 = 4\lambda^2 - 9\lambda - 34 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{17}{4}, \ \lambda_2 = -2.$$

При $\lambda_1 = \frac{17}{4}$: $-32x + 12y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8}{3}x \Rightarrow 4x^2 + \frac{64}{9}x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{100} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}, \ y_{1,2} = \pm 4.$

При $\lambda_2 = -2$: $12x + 8y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow 4x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2, \ y_{3,4} = \mp 3.$

Итак, точки $\left(-\frac{3}{2}; -4\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$, $(-2; 3)$ и $(2; -3)$ – подозрительные на условный экстремум.

2) Теперь нужно исследовать квадратичную форму

$$L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)(h^1)^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)h^1h^2 + L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)(h^2)^2 = (2-8\lambda)(h^1)^2 + 24h^1h^2 + (4-2\lambda)(h^2)^2$$

при условии $8x_0h^1 + 2y_0h^2 = 0$ (равенство нулю дифференциала $dF(x_0,y_0)(h^1,h^2) = 0$) на знакоопределённость.

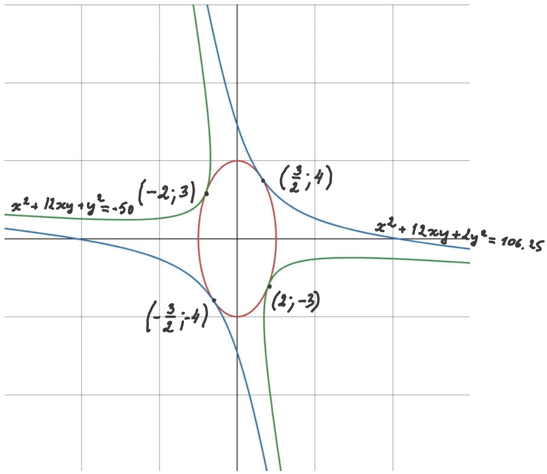
Так в точке $(2;-3)$ при $\lambda = -2$,

$$18(h^1)^2 + 24h^1h^2 + 8(h^2)^2\Big|_{16h^1 - 6h^2 = 0} = \left(18 + 24\cdot\frac{8}{3} + 8\cdot\frac{64}{9}\right)(h^1)^2 > 0 \quad \text{при } h^1 \neq 0,$$

поэтому точка $(2;-3)$ – точка условного минимума.

Остальные точки исследуются аналогично

(см. следующую страницу)



Геометрическая интерпретация решения