Демидович 386. Доказать, что

$$\inf_{[0;+\infty)} \frac{x}{1+x} = 0 \quad \text{и} \quad \sup_{[0;+\infty)} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Решение: Заметим, что $f(x) = \dfrac{x}{1+x} < 1$ для всех $x \in [0;+\infty)$, т.е. выполняется первое условие в определении точной верхней грани

Если $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{x}{1+x} > 1-\varepsilon$ для всех $x \in [0;+\infty)$. При $\varepsilon \in (0,1)$ разрешим относительно x неравенство

$$\frac{x}{1+x} > 1-\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Тогда в частности при $x_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ будем иметь $f(x_\varepsilon) = \dfrac{\frac{2}{\varepsilon}-1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \dfrac{2-\varepsilon}{2} = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} > 1-\varepsilon$, т.е. выполняется и второе условие из определения точной верхней грани.

Равенство $\inf\limits_{[0;+\infty)} \dfrac{x}{x+1} = 0$ вытекает из того, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [0;+\infty)$ и $f(0) = 0$