РФ23-01Б: Разбор домашней работы от 5/09/2023

Задача 2. Доказать методом математической индукции

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Решение. При $n = 1$ левая и правая части, доказываемого равенства, совпадают. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$

База индукции доказана.

Предположим, что для некоторого натурального числа p справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Тогда в силу этого предположения сумма

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 =$$

$$= (p+1)\cdot\frac{2p^2+7p+6}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}.$$

Таким образом, предположив, что формула (1) верна при некотором $p \in \mathbb{N}$, мы смогли показать её справедливость и для следующего натурального числа $p+1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции формула суммирования (1) верна для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k^3,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Напомним, что

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Выразив из равенства

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

величину, стоящую под знаком суммы,

$$k^3 = \frac{1}{4}\left((k+1)^4 - k^4\right) - \frac{3}{2}k^2 - k - \frac{1}{4},$$

мы можем переписать искомую сумму в виде

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\left((k+1)^4 - k^4\right) - 6k^2 - 4k - 1\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4 - k^4\right) - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k - \frac{n}{4}.$$

Далее, используя формулу телескопического суммирования и уже известные суммы первых n натуральных чисел и их квадратов (1), а затем приводя подобные, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1\right) - \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$