БФ23-05Б: Разбор домашней работы от 11/09/2023

Задача (Д10в). Докажите неравенство

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k,$$

где $x_k \in [0;\pi]$, $k = 1, \dots, n$.

Решение. При $n = 1$ неравенство тривиально выполняется. Докажем неравенство при $n = 2$, для этого заметим, что по неравенству треугольника

$$|\sin(x_1 + x_2)| = |\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1| \le |\sin x_1 \cos x_2| + |\sin x_2 \cos x_1|.$$

Так как $|\cos x_i| \le 1$ при $x_i \in \mathbb{R}$ и $\sin x_i \ge 0$ при $x_i \in [0;\pi]$,

$$|\sin(x_1 + x_2)| \le |\sin x_1||\cos x_2| + |\sin x_2||\cos x_1| \le \sin x_1 + \sin x_2.$$

Теперь предположим, что при некотором $p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{p} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{p} \sin x_k,$$

где $x_k \in [0;\pi]$, $k = 1, \dots, p$. Тогда выполняется цепочка неравенств

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{p+1} x_k\right| = \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\cos x_{p+1} + \sin x_{p+1} \cos\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right| \le$$

$$\le \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right| \left|\cos x_{p+1}\right| + \left|\sin x_{p+1}\right| \left|\cos\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right| \le \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right| + \left|\sin x_{p+1}\right| \le$$

$$\big/\text{по гипотезе индукции}\big/ \le \sum_{k=1}^{p} \sin x_k + \sin x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \sin x_k.$$

Тем самым согласно принципу математической индукции неравенство справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$.