

РФ23-01Б: Разбор домашней работы от 12/09/2023

Задача (Д10в). Докажите неравенство

$$\left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k,$$

где $x_k \in [0; \pi]$, $k = 1, \dots, n$.

Решение. При $n = 1$ неравенство тривиально выполняется. Докажем неравенство при $n = 2$, для этого заметим, что по неравенству треугольника

$$|\sin(x_1 + x_2)| = |\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1| \leq |\sin x_1 \cos x_2| + |\sin x_2 \cos x_1|.$$

Так как $|\cos x_i| \leq 1$ при $x_i \in \mathbb{R}$ и $\sin x_i \geq 0$ при $x_i \in [0; \pi]$,

$$|\sin(x_1 + x_2)| \leq |\sin x_1| |\cos x_2| + |\sin x_2| |\cos x_1| \leq \sin x_1 + \sin x_2.$$

Теперь предположим, что при некотором $p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sin \sum_{k=1}^p x_k \right| \leq \sum_{k=1}^p \sin x_k,$$

где $x_k \in [0; \pi]$, $k = 1, \dots, p$. Тогда выполняется цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \left| \sin \sum_{k=1}^{p+1} x_k \right| &= \left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \cos x_{p+1} + \sin x_{p+1} \cos \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| |\cos x_{p+1}| + |\sin x_{p+1}| \left| \cos \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| \leq \left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| + |\sin x_{p+1}| \leq \\ &\text{/ по гипотезе индукции /} \leq \sum_{k=1}^p \sin x_k + \sin x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \sin x_k. \end{aligned}$$

Тем самым согласно принципу математической индукции неравенство справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$.