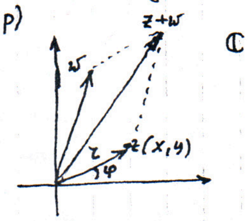
Лекция 15:

o Комплексные числа

<u>Определение:</u> Комплексным числом $z = x + iy$ наз-ся упорядоченная пара (x, y) действительных чисел, называемых соот-но действительной частью и мнимой частью комплексного числа z ($x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$).

Считая пару (x, y) декартовыми координатами точки плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, можно отождествить комплексные числа с точками этой плоскости или с двумерными векторами с координатами (x, y).

Сложение комплексных чисел $z = x + iy$, $w = t + ip$ соответствует правилу сложения векторов, т.е. покоординатное: $z + w = (x + t) + i(y + p)$



Длину вектора (x, y) называют модулем комплексного числа $z = x + iy$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Множество комплексных чисел, рассматриваемых как мн-во точек плоскости, называется комплексной плоскостью и обоз-ся $\mathbb{C}$.

Точку плоскости можно задать также и в полярных координатах (r, φ), которые связаны с декартовыми координатами формулами перехода

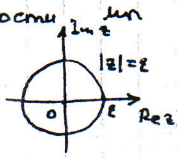
$$x = r\cos\varphi \qquad (*)$$
$$y = r\sin\varphi$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно переписать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$ (<u>тригоно</u>метрическая форма записи комп. числа)

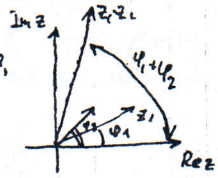
Как видно из $(*)$ $|z| = \sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r$, а угол φ – аргумент числа z.

В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ аргумент комплексного числа определён с точностью до величины, кратной 2π. Для определённости мы будем считать, что $0 \le \varphi < 2\pi$.



Перемножим $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1\cos\varphi_1 + ir_1\sin\varphi_1)(r_2\cos\varphi_2 + ir_2\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + ir_1 r_2(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2 \, (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$



Т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемнож-ся, а аргументы складываются.

Приведём <u>без вывода</u> формулу Эйлера:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

С её помощью вводится так называемая показательная форма записи комп-го числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

15.1 Абелевы интегралы

Подобно многочлену одного переменного можно определить многочлен двух переменных:

$$H(x,y)=\sum_{\substack{0\le i\le k\\0\le j\le l}} a_{ij}x^i y^j = a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\dots+a_{kl}x^k y^l,$$

$n=k+l$ наз-ся степенью многочлена $H(x,y)$; $\deg H=n$.

Рациональной функцией двух переменных также определяется как отношение многочленов двух переменных:

$$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Рассмотрим теперь следующий интеграл:

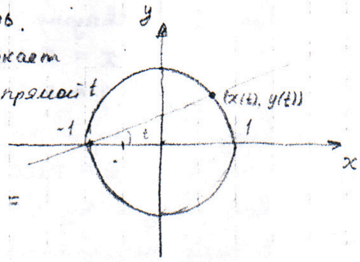
$$\int\limits_{H(x,y)=0} R(x,y)\,dx := \int R(x,y(x))\,dx,$$ где $y=y(x)$ – решение алгебраического уравнения $H(x,y)=0$ относит-но y, т.е. $H(x,y(x))\equiv 0$.

Такой интеграл наз-ся абелевым. Вопрос о выражении такого интеграла через элементарные функции связан с геометрией кривой, заданной уравнением $H(x,y)=0$.

Пусть $H(x,y)=x^2+y^2-1$, $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=1} R(x,y)\,dx=\int R(x,\pm\sqrt{1-x^2})\,dx$ $(*)$

Уравнение $x^2+y^2=1$ задает на плоскости $\mathbb{R}^2$ окружность.

Прямая $y=t(x+1)$ проходит через точку $(-1,0)$ и пересекает окружность в точке $(x(t),y(t))$, зависящей от наклона прямой t.



Найдем эту точку, решив уравнение

$x^2+t^2(x+1)^2=1$

$(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$, $\quad D=4t^4-4(t^2-1)(1+t^2)=$

$=4t^4-4(t^4-1)=4$

$$x_1=\frac{-2t^2-2}{2(1+t^2)}=-1,\quad x(t)=\frac{-2t^2+2}{2(t^2+1)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \Rightarrow\ y(t)=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Мы получили рациональную параметризацию окружности: $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)=(x(t),y(t))$.

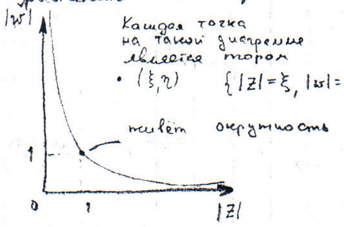
Тогда $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=1} R(x,y)\,dx=\int R(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,dt$ – интеграл от рациональной функции, как мы уже видели такие интегралы вычисляются в элементарных функциях.

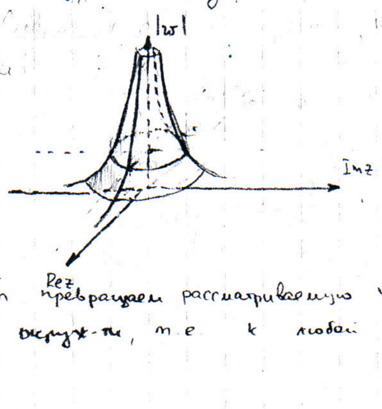
Сделаем первое наблюдение: абелев интеграл выражается в элементарных функциях, если кривая $H(x,y)=0$ допускает рациональную параметризацию. Кривые с таким свойством называются уникурсальной.

Однако, рациональность окружности связана с её фундаментальным, геометрическим свойством.

Если считать, что в уравнении окружности $x^2+y^2=1$ переменные x и y комплексными, то множество его комплексных корней с двумя добавленными точками (бесконечноудалёнными) называемое римановой поверхностью окружности $x^2+y^2=1$, – является двумерной вещественной поверхностью – вещественной сферой S^2 в четырёхмерном пространстве $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$.

От уравнения $x^2+y^2=1$ заменой $z=x+iy$, $w=x+iy$ можно перейти к уравнению $zw=1$.





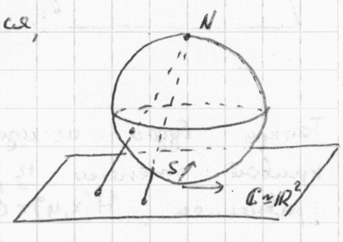
Добавляются точки $\{z=0\}$, $\{w=0\}$: этим мы превращаем рассматриваемую поверх-ть в сферу S^2.

Заметим, что они не зависят от радиуса окруж-ти, т.е. к любой окружности будут добавляться эти точки.

15.2 Стереографическая проекция и формула Римана-Гурвица

Теперь рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, её также называют комплексной прямой. Покажем, что добавление к $\mathbb{C}$ одной бесконечно-удалённой точки превращает её в сферу, т.е. то, что риманова поверхность комплексной прямой является сферой.

С помощью стереографической проекции показывается, что множество точек плоскости $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством точек сферы за исключением северного полюса N.



Таким образом, добавив к плоскости всего одну точку, мы превратим её в сферу

$$\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2.$$

При увеличении степени уравнения $H(x,y)=0$ (для окружности она была равна 2) влечёт усложнение римановой поверхности. Так уравнение

$$x^2 + y^3 = 1$$

определяет в $\mathbb{C}^2$ риманову поверхность, являющуюся тором.

Увидим это, разрешим уравнение относительно переменной x:

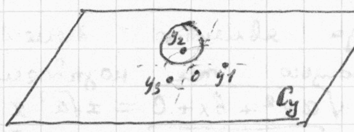
$$x = \sqrt{1-y^3},$$

из этой формулы видно, что одному значению y соответствуют два значения x, это происходит для всех y за исключением трёх точек, где $1-y^3=0$. Значит график этой комплексной функции двухлистно накрывает плоскость $\mathbb{C}_y$ переменного y во всех точках кроме

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad y_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

В этих точках листы склеиваются, однако, удалив эти точки листы не разделятся на два отдельных.

Действительно, выберем окружность малого радиуса вокруг одной из точек y_1, y_2, y_3. Выберем точку y_0 на этой окружности и заставим обойти её вокруг указанной окружности.



Соответствующее значение x на одном из листов при таком обходе не вернётся на своё место, оно изменит знак и перейдёт на другой лист. ~~[Пусть $1-y_0^3 = r_0 e^{i\varphi}$, $x=\sqrt{1-y_0^3}=\sqrt{r_0}\, e^{i\varphi/2}$, обход вокруг одной из точек приводит к увеличению аргумента на 2π: $1+y_0^3 = r_0 e^{i\varphi+2\pi}$, $x=\sqrt{1-y_0^3} = \sqrt{r_0}\, e^{i\varphi/2}\cdot e^{i\pi} = -\sqrt{r_0}\, e^{i\varphi/2}$,~~ т.е. ~~мы перешли на другой лист. При двухкратном обходе этой же окружности значение x вернётся на своё~~ место. ~~Соединим теперь]~~ Из равенства

$$1-y^3 = (1-y)\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}-y\right)\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}-y\right) = re^{i\theta}$$

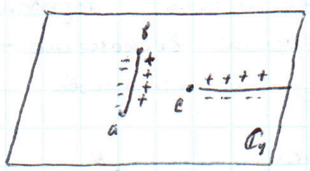
видно, что при обходе окружности один из сомножителей изменит аргумент на 2π, а другие нет:

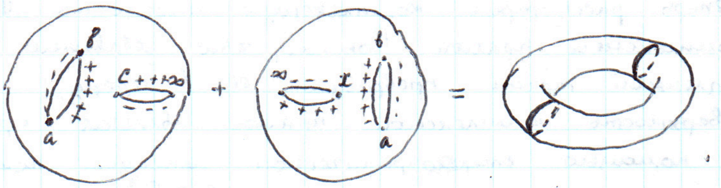
$$re^{i\theta} \to re^{i\theta+2\pi} \Rightarrow \sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \longrightarrow \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}\cdot e^{i\pi} = -\sqrt{r}\, e^{i\theta/2},$$

т.е. мы перешли на другой лист. При двухкратном обходе значение x вернётся на своё место.

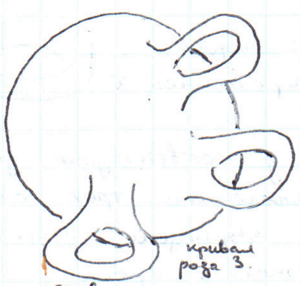
Соединим теперь точки $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ и $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ отрезком, обход вокруг него оставляет нас на одном листе. Обход вокруг трёх точек $1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$ снова перемещает нас на другой лист.

Таким образом, наша поверхность $x^2+y^3=1$ устроена как два экземпляра плоскости $\mathbb{C}_y$, разрезанной вдоль отрезков $[a,b]$ и $[c,\infty]$, склеенные по берегам разреза на разных экземплярах плоскости „плюс" к „минусу"





Теперь будем исследовать риманову поверхность алгебраической кривой степени $\underline{\underline{n}}$, заданной на плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами x, y уравнением $H(x,y)=0$, H – комплексный многочлен степени $\underline{n}$. В хорошем случае, если на этой поверхности нет особых точек (их нет для большинства значений коэф-в мн-на H), то риманова поверхность будет сферой с g ручками



Число ручек g (наз-ся родом поверхности) даётся для неособой алгебраической кривой степени n формулой

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

(формула Римана - Гурвица)

Как видно из этой формулы кривые степени 1 и 2 всегда являются сферами, т.е. рода 0.

Поэтому абелевы интегралы по таким кривым всегда выражаются через элементарные функции. В частности, интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

всегда являются элементарными, на практике они вычисляются с помощью так называемых подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + z$, $a>0$
2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$, $c>0$
3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$

Естественно, что эти подстановки тесно связаны с рациональной параметризацией кривой $y^2 = ax^2+bx+c$.

В случае кривой $H(x,y)=0$ высокой степени, её знания уже не достаточно для заключения о рациональности кривой. Ведь согласно формуле Римана-Гурвица все неособые кривые имеют одинаковый род, поэтому рациональные кривые стоит искать среди особых кривых.

Оказывается, что род поверхности уменьшается при появлении особенностей. Следовательно для рациональности нужно, чтобы кривая имела достаточно много особенностей. А именно, простая особая (точка самопересечения) уменьшает род кривой на 1. Таким образом для рациональности необходимо наличие $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ точек самопересечения

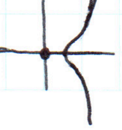
Примеры:

1) $y^3+x^3-3xy=0$ – вещественный срез ~~графика~~ имеет вид, т. $(0,0)$ - точка самопересечения

2) $y^3-x^3+x^2=0$ – т. $(0,0)$ – точка самопересечения

3) $y^2=x^3$

каси им точке возврата



15.3 Подстановки Чебышёва

Итак всякий абелев интеграл, связанный с поверхностью рода 0 является элементарной функцией. Когда кривая нерациональная, абелев интеграл, который связан с ней, вообще говоря, есть ф-ция неэлементарная. Тем не менее, каково бы не было уравнение

$$H(x,y)=0,$$

всегда сущ-т бесконечное число рациональных ф-ций $R(x,y)$, что

$$\int\limits_{H(x,y)=0} R(x,y)\,dx$$

будет элементарной функцией. При заданной $R(x,y)$ трудно узнать, будет ли интеграл выражаться через элементарные ф-ции.

В частности, это имеет место, если $R(x,y)dx$ можно привести к рациональному дифференциалу при помощи некоторой алгебраической подстановки. Например, это можно сделать для дифференциального бинома:

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx, \quad m,n,p\in\mathbb{Q}.$$

1. При $\boxed{\text{целом } p}$ делается замена $x=t^d$, где d – наибольший общий знаменатель чисел m и n.

2. Сделав замену $ax^n+b=t$, $x=\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}$, мы получим, что

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{na}\int t^p\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dt,$$

этот интеграл можно взять, если $\boxed{\frac{m+1}{n}-1 \text{ – целое.}}$

3. $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx$$

интегрируется, когда $\frac{m+np+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p$ являются целым.

Чебышёв показал, что эти три случая интегрируемости являются единственными, когда при рац-х m,n,p интеграл выражается при помощи конечного числа элементарных символов.

На практике удобнее сначала привести к более простому виду:

$$ax^n=bt$$

$$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}t^{1/n},\quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}t^{1/n-1}dt,$$

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p\,dt$$

Положив $q=\frac{m+1}{n}-1$, приходим к

$\int t^q(1+t)^p\,dt$, который интегрируется только в 3х случаях:

1. p – целое 2. q – целое 3. $p+q$ – целое.

В 1. $p\in\mathbb{Z}$, $q=\frac{r}{s}$ делаем замену $t=u^s$.

2. $q\in\mathbb{Z}$, $p=\frac{r}{s}$ делаем замену $1+t=u^s$.

3. $p+q\in\mathbb{Z}$: переписав

$\int t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt$, для уничтожения иррациональности нужно положить $1+t=tu^s$, если $p=\frac{r}{s}$.