Вводная лекция

Центральным объектом всего курса математического анализа является функция. Под функцией мы будем понимать понимать зависимость значения одной величины y от значения другой величины x. В первом семестре мы чаще всего будем рассматривать функции одного вещественного переменного, то есть, которые сопоставляют одному вещественному числу x другое вещественное число y:

$$y = f(x).$$

Выпускнику школы обычно уже известно, что одна функция $f(x)$ может производить другую функцию $f'(x)$, которая называется *производной функции* $f(x)$. Операция взятия производной от функции называется *дифференцированием*. Она по сути представляет собой функцию от функции, значения которой тоже являются функциями. В анализе такие объекты обычно называют операторами.

Какого же рода задачи приводят к понятию производной?[1]

Задача 1. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Мы хотим описать касательную прямую

$$y = k(x - x_0) + f(x_0)$$

к графику функции, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$, очевидно лежащую на графике.

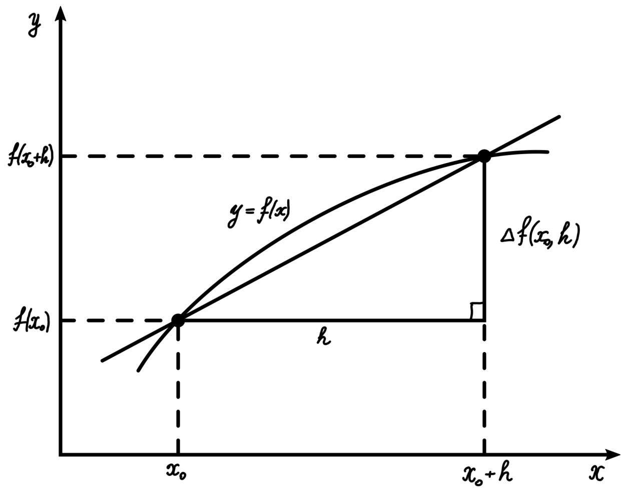

Рис. 1

Для этого проведем секущую, проходящую через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, ее угловой коэффициент (тангенс угла наклона) равен

$$k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0, h)}{h},$$

где числитель

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

[1] В этой лекции мы жертвуем математической строгостью рассуждений во имя наглядности.

называется *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0, а знаменатель h – *приращением аргумента*.

Геометрия подсказывает нам: когда h становится очень мало, секущая мало отличается касательной. Иными словами, секущая стремится к касательной, когда приращение h устремляется к нулю. При этом угловой коэффициент касательной

$$k(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

где знак lim используется для обозначения операции стремления h к нулю. Угловой коэффициент и является значением производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0. В этом состоит *геометрический смысл производной*.

Задача 2. Пусть теперь $x = s(t)$ – функция, описывающая закон движения точки вдоль числовой оси Ox. Как описать скорость движения точки в момент времени t_0?

Нужно рассмотреть промежуток времени $[t_0, t_0+h]$ и среднюю скорость движения точки за этот промежуток

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}.$$

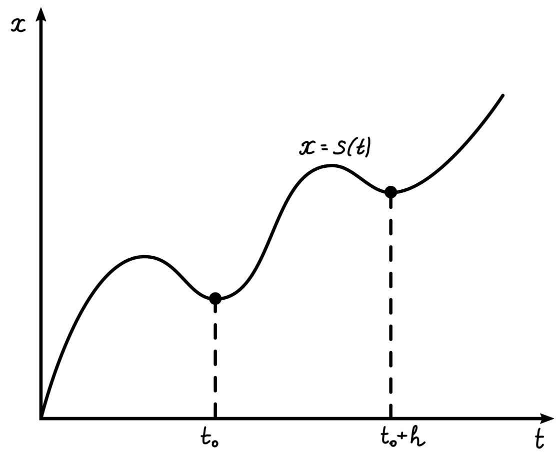

Рис. 2

Устремляя h к нулю в этом выражении, мы получим, что искомая мгновенная скорость есть

$$v_{\text{ср.}}(t_0) = s'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}.$$

Физический смысл производной – скорость изменения какой-либо величины.

Итак, равенство

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

кладется в основу определения производной. Для его формализации нам нужно будет строго объяснить, что мы будем понимать под *пределом* и *операцией предельного перехода* lim. В этом состоит наша первоначальная задача.

Но даже, исходя из интуитивных представлений о предельном переходе, мы уже можем найти производные некоторых функций.

Пример 1. Пусть $f(x) = C$ – постоянная функция, которая во всех вещественных точках x принимает значение C. Тогда

$$(C)' = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

Пример 2.

$$(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Пример 3.

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

Пример 4. Для вычисления производной от $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, нам потребуется формула *бинома Ньютона* для возведения суммы двух вещественных чисел a и b в степень n:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

По определению

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Пример 5. Наша интуиция подсказывает, что при малых t значение $\sin t$ мало отличается от самого t, и что малые изменения аргумента косинуса влекут малые изменения его значений. Тогда

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Вскоре мы вычислим производные всех основных функций, получив таблицу производных:

$f(x)$	x^α	e^x	a^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \ln x$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f(x)$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(1+x^2)$	$-1/(1+x^2)$

Задача 3. Можно рассмотреть и обратную дифференцированию операцию: по заданной функции $f(x)$ найти функцию $F(x)$, такую что $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, а операция её нахождения – *неопределенным интегрированием*. Давайте выясним как первообразная связана с площадью под графиком функции.

Пусть $S(x)$ – площадь, лежащая под графиком $y = f(x)$ над отрезком $[a, x]$, где $a \le x \le b$.

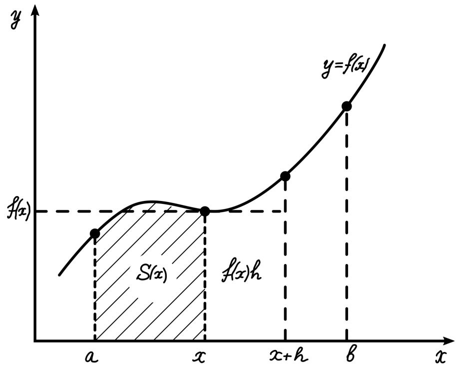

Рис.3

Приращение площади естественно представляется в виде

$$S(x+h) - S(x) = f(x)h + \alpha(h),$$

где величина $\alpha(h)$ – разность между площадью под графиком над отрезком $[x, x+h]$ и площадью прямоугольника с вершинами $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(x{+}h, f(x))$ и $(x{+}h, 0)$. Можно показать, что

$$0 \le |\alpha(h)| \le C(x, h)h,$$

где $C(x, h)$ стремится к нулю, если $h \to 0$. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \frac{\alpha(h)}{h},$$

переходя к пределу по $h \to 0$ в котором, мы находим,

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x).$$

Таким образом, $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Этот факт лежит в основе *формулы Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$