Лекция 10: Свойства непрерывных функций (продолжение)

10.1 Равномерная непрерывность

Определение 10.1: Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $E \subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ выполняется условие

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in E: \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Сравнивая (1) с условием непрерывности функции f на множестве E:

$$(2) \quad \forall x_0 \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

мы понимаем, что всякая равномерно непрерывная на E функция является и просто непрерывной на E (нужно просто положить $x_2 = x_0$ в условии (1)). Обратное неверно, т.е. понятие равномерной сходимости содержательно. В условие (2) выбор числа δ зависит от точки x_0 и от ε, в то же самое время в условии (1) выбор δ зависит от ε и неявно от множества E.

Запишем отрицание условия (1):

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in E: \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 10.2: Рассмотрим непрерывную на $(0;1)$ функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Выберем две стремящиеся к 0 последовательности

$$x_n' = \frac{1}{\pi n}, \quad x_n'' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Поскольку их разность $x_n' - x_n''$ тоже стремится к нулю, то $\forall \delta > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$, т.ч. $|x_m' - x_m''| < \delta$. Для таких значений последовательности разность

$$|f(x_m') - f(x_m'')| = |\sin \pi m - \sin(2\pi m + \tfrac{\pi}{2})| = 1,$$

поэтому функция f не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$.

Теорема 10.2: (Кантора о равномерной непрерывности)

Пусть функция $f \in C[a;b]$. Тогда f равномерно непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство: Функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$, поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся δ-окрестность $U_\delta(x)$ точки x, т.ч. колебание

$$\omega(f, \tilde{U}_\delta(x)) < \varepsilon, \quad \text{где } \tilde{U}_\delta(x) := [a,b] \cap U_\delta(x)$$

Система окрестностей $\{U_{\delta/2}(x)\}_{x \in [a,b]}$ образует покрытие отрезка $[a;b]$ интервалами. По лемме о конечном покрытии (лемма 2 лекция 2) можно выделить конечное подпокрытие $U_{\delta_1/2}(x_1), \ldots, U_{\delta_n/2}(x_n)$. Выберем $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_1, \ldots, \frac{1}{2}\delta_n\}$. Докажем, что для любых $x', x'' \in [a;b]: |x' - x''| < \delta$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Поскольку система $U_{\delta_1/2}(x_1), \ldots, U_{\delta_n/2}(x_n)$ покрывает отрезок $[a,b]$, то точка x' содержится в какой-то окрестности $U_{\delta_i/2}(x_i)$, т.е.

$$|x' - x_i| < \frac{\delta_i}{2}.$$

Тогда $|x'' - x_i| = |(x'' - x') + (x' - x_i)| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{1}{2}\delta_i \leqslant \frac{1}{2}\delta_i + \frac{1}{2}\delta_i = \delta_i$.

Следовательно, $x', x'' \in [a,b]$ и $x', x'' \in U_{\delta_i}(x_i)$, а это влечёт неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(f; \tilde{U}_{\delta_i}(x_i)) < \varepsilon,$$

◀

10.3 Обратные функции и их непрерывность

Функция $f: X \to Y$ называется

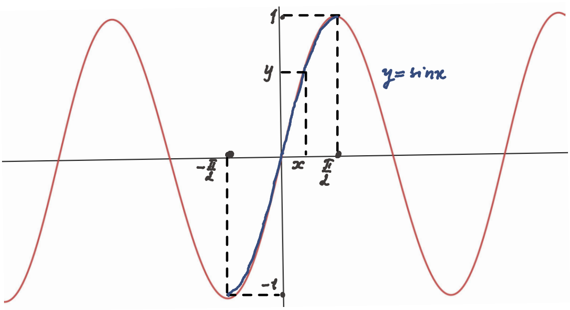
1) **инъекцией**, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется условие $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$;
2) **сюръекцией**, если $f(X) = Y$;
3) **биекцией**, если f — инъекция и сюръекция.

Для биекции $f: X \to Y$ естественно возникает функция

$$f^{-1}: Y \to X,$$

такая что $f^{-1}(y) = x$, если $y = f(x)$. Эта функция называется **обратной** к функции f.

Пример 10.2: 1) Рассмотрим ограничение функции $\sin x$ на отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,



эта функция является возрастающей, поэтому она биективно переводит отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ в отрезок $[-1; 1]$. Поэтому она имеет обратную функцию:

$$x = \arcsin y,$$

область определения которой — отрезок $[-1; 1]$, а область значений — $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Теорема 10.3: Строго монотонная функция $f: X \to \mathbb{R}$ имеет обратную функцию $f^{-1}: Y \to X$, определённую на множестве $Y = f(X)$, и имеющую тот же вид монотонности на Y, какой имеет исходная функция f на X.

Более того, если $X = [a; b]$ и $f \in C[a; b]$, то Y — это отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, и функция $f^{-1} \in C(Y)$.

Доказательство: Заметим, что $f: X \to Y = f(X)$ является сюръекцией. Для определённости будем считать, что f возрастает на X, т.е. для всех $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, f инъективна, а значит f — биекция. Тогда определена обратная функция $f^{-1}: Y \to X$, т.ч. $x = f^{-1}(y)$, где $y = f(x)$.

Если $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Значит из возрастания f вытекает, что $y_1 < y_2$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, т.е f^{-1} возрастает на Y.

Пусть для определённости функция f возрастает на $X=[a;b]$. Если $a<x<b$, то $f(a)<f(x)<f(b)$, т.е. все значения функции f лежат между $f(a)$ и $f(b)$. В силу непрерывности f на отрезке функция принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, множество значений $Y=f(X)$ является отрезком $[f(a);f(b)]$, на котором определена и возрастает функция f^{-1}. ◄

Пример 10.3: 1) Функция $\arcsin x$ возрастает на $[-1;1]$ и непрерывна на этом отрезке.
2) Аналогично $\arccos x$ убывает на $[-1;1]$ (от значения π к значению 0) и непрерывна на этом отрезке.
3) Функция $y=\operatorname{tg} x$, ограниченная на интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, возрастает от значения $-\infty$ до $+\infty$, и непрерывна на интервале. Поэтому по теореме 10.3 она имеет обратную функцию $x=\operatorname{arctg} y$, определенную на $\mathbb{R}$ и возрастающую от $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Непрерывность доказывается непосредственно. ◄