Лекция 11:

11.1 Производная и дифференциал

Пусть функция $f: E \to \mathbb{R}$ определена на множестве E, точка x_0 — предельная точка множества E.

Определение 11.1: Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в т. $x \in E$ тогда и только тогда, когда приращение функции представляется в виде

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x; h),$$

$\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x, x+h \in E$.

Линейная функция $A(x)h$ относительно приращения аргумента h называется **дифференциалом функции** f в т. x.

Приняты следующие обозначения

$\Delta f(x; h) := f(x+h) - f(x)$ для приращения функции f в т. x;

$\Delta x(h) := (x+h) - x = h$ для приращения аргумента,

$df(x)(h) := A(x)h$ для дифференциала функции f в т. x

Определение 11.2: Величина

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x; h)}{\Delta x(h)} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

называется **производной** функции f в точке x,

Лемма 11.1: Функция $f: E \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в т. $x \in E$ тогда и только тогда, когда существует $f'(x)$. Более того, $A(x) = f'(x)$.

Доказательство: $(\Rightarrow)$ Функция f дифференцируема в т. $x \in E$ тогда и только тогда, когда

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

Откуда величина

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A(x) + \frac{o(h)}{h}, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A(x),$$

т.е. производная $f'(x)$ существует и совпадает с $A(x)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть существует

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \iff f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + a(x; h),$$

где $a(x; h) \to 0$ при $h \to 0$, в некоторой окрестности $U_E(x)$. Откуда

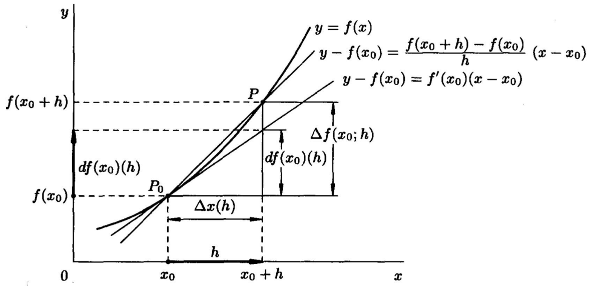
$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + a(x; h) \cdot h = f'(x)h + o(h) \text{ при } h \to 0,$$

т. е. f дифференцируема в т. x. ◀

Из леммы 11.1 вытекает единственность дифференциала $df(x)(h) = f'(x)h$.

Утверждение 11.1: Функция $f: E \to \mathbb{R}$, непрерывная в т. $x \in E$, допускает линейное приближение
$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0$$
тогда и только тогда, когда f дифференцируема в т. x_0. Более того, $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$

Прямая, заданная уравнением
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
проходящая через т. $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется **касательной к графику функции** f в т. $(x_0, f(x_0))$.



Число h можно трактовать как вектор смещения из точки x_0:
$$h \in T_{x_0}\mathbb{R}.$$
Тогда
$$df(x_0): T_{x_0}\mathbb{R} \to T_{f(x_0)}\mathbb{R}$$
$$df(x_0): h \mapsto f'(x_0)h$$

Пример 11.1:

1) $(\sin x)' := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \cos x,$

2) $(\cos x)' := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h} = -\sin x.$

3) $(e^x)' := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x.$

4) $(\ln x)' := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$

11.2 Основные правила дифференцирования

Теорема 11.1: Пусть функции $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$. Тогда

1) Сумма $(f+g)(x)$ дифференцируема в точке x, и
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2) Произведение $(f g)(x)$ дифференцируемо в точке x, и
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3) Частное $(f/g)(x)$ дифференцируемо в точке x, если $g(x) \neq 0$, причём
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство: 1) Используя определение дифференцируемости,

$$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = (f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x)) =$$
$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) = (f'(x)h + o(h)) + (g'(x)h + o(h)) =$$
$$= (f'(x) + g'(x))h + o(h),$$

т.е. $f+g$ дифференцируема в т. x, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2) Аналогично

$$(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f(x) + f'(x)h + o(h))\cdot$$
$$\cdot (g(x) + g'(x)h + o(h)) - f(x)g(x) = f(x)g(x) + f(x)g'(x)h + o(h) +$$
$$+ f'(x)g(x)h + f'(x)g'(x)h^2 + o(h) + o(h) = (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))h + o(h),$$

т.е $(fg)(x)$ дифференцируема в т. x, и $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

3) Упражнение ◀

Следствие 1: 1) $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$,

2) $d(f\cdot g)(x) = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x)$;

3) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Пример 11.2: $(tg\,x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. ◀

Теорема 11.2: (теорема о дифференциале композиции)
Пусть функция $f: X \to Y$ дифференцируема в т. $x \in X$, функция $g: Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. $y = f(x)$. Тогда композиция $g\circ f: X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. $x \in X$, при этом $d(g\circ f)(x): T_x\mathbb{R} \to T_{f(x)}\mathbb{R}$ равен композиции $dg(y)\circ df(x)$ дифференциалов $df(x)$ и $dg(y)$, где $y = f(x)$.

Доказательство: Из условий дифференцируемости:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad \text{при } h\to 0,\ x+h \in X,$$
$$g(y+t) - g(y) = g'(y)t + o(t) \quad \text{при } t \to 0,\ y+t \in Y.$$

Можно считать, что $o(t) = \gamma(t)t$, где $\gamma(t) \to 0$ при $t\to 0$, т.е. $\gamma(0) = 0$.
Запишем $t = (y+t) - y = f(x+h) - f(x) \to 0$ при $h \to 0$, т.к. дифференцируемая в т. x функция f является непрерывной в т. x. Тогда

$$\gamma(f(x+h) - f(x)) = \alpha(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Рассмотрим приращение

$$(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+t) - g(y) =$$
$$= g'(y)t + o(t) = g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) = g'(f(x))(f'(x)h + o(h)) +$$
$$o(f(x+h) - f(x)) = g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))o(h) + o(f(x+h) - f(x)) =$$

$$\stackrel{}{=} g'(f(x))\, f'(x) h + o(h),$$

т.к. $\quad o(f(x+h)-f(x)) = \gamma(f(x+h)-f(x))(f(x+h)-f(x)) = \alpha(h)(f'(x)h + o(h)) =$
$= \alpha(h) f'(x) h + \alpha(h) o(h) = o(h) + o(h) = o(h)$ при $h\to 0$, $x+h\in X$.
Таким образом, функция $g\circ f$ дифференцируема в т. x и

$$d(g\circ f)(x)(h) = dg(f(x))(df(x)(h)) = (dg(y)\circ df(x))(h).$$

Следствие 1: (Цепное правило)

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) \quad \text{или} \quad (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Пример 11.3 1) Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ и $x>0$, тогда

$$(x^{\alpha})' = (e^{\ln x^{\alpha}})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)' = \frac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2) **Логарифмическая производная**

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Действительно, если $f(x)>0$, то $(\ln|f(x)|)' = (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$.
А, если $f(x)<0$, то $(\ln|f(x)|)' = (\ln(-f(x)))' = \frac{1}{-f(x)}\cdot(-f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Теорема 11.3 (о производной обратной функции)
Пусть $f: X\to Y$, $f^{-1}: Y\to X$ – взаимно обратные функции, которые непрерывны в т. x_0 и $y_0 = f(x_0)$, соответственно. Если функция f дифференцируема в т. x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ дифференцируема в т. y_0 и

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство: Заметим, что величины $f(x)-f(x_0)$ и $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)$ при $y=f(x)$ не обращаются в нуль, если $x\neq x_0$, т.к. $f: X\to Y$ и $f^{-1}: Y\to X$ – взаимно обратные функции. В силу непрерывности f в т. x_0 и f^{-1} в т. y_0 имеем, что $x\to x_0 \Leftrightarrow y\to y_0$. Тогда по теореме о пределе композиции получим, что

$$(f^{-1})'(y_0) := \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 11.4: Функции $\sin: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ и $\arcsin: [-1;1]\to[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ взаимно обратны и непрерывны. При $|x|<\frac{\pi}{2}$ $(\sin x)' = \cos x \neq 0$ и значения $y=\sin x$ лежат в интервале $(-1;1)$, поэтому

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{при } |y|<1.$$

Пример 11.5 (производная параметрически заданной функции)

Пусть $x(t), y(t)$ — две функции, определённые в окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что в окрестности $x_0 = x(t_0)$ функция $x(t)$ имеет обратную $t = t(x)$. Тогда в окрестности т. x_0 определена функциональная зависимость $y = y(x)$, где $y(x) = y(t(x))$, найдём её производную в т. x_0:

$$y'_x\Big|_{x=x_0} = \frac{d(y(t(x)))}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} \cdot \frac{dt(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}}{\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

◀

11.3 Производные высших порядков

Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке E, то мы можем рассмотреть $f': E \to \mathbb{R}$, т.ч. $x \mapsto f'(x)$. Производная этой функции называется **второй производной** функции f:

$$f''(x) := (f'(x))'.$$

Аналогично, определяется **производная n-го порядка**: $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))'$. Саму функцию f принято считать производной 0-го порядка

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\dots$	$f^{(n)}(x)$
e^x	e^x	e^x		e^x
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	$\dots$	$a^x \ln^n a$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dots$	$\sin(x + n\frac{\pi}{2})$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\dots$	$\cos(x + n\frac{\pi}{2})$
$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\dots$	$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$
$\ln\lvert x\rvert$	x^{-1}	$-x^{-2}$	$\dots$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

Пример 11.6 (вторая производная параметрически заданной функции)

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

◀