Лекция 12: Основные теоремы дифференциального исчисления

12.1 Локальные экстремумы функции

Определение 12.1: Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называется **точкой локального минимума** (**максимума**) функции $f: E \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует $U(x_0)$ во множестве E такая, что

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (f(x_0) \geq f(x)).$$

Если неравенство строгое, то x_0 — **точка строго локального минимума или максимума**.

Точки максимума или минимума называются точками **локального экстремума**, а значения функции в них — **локальными экстремумами**.

Теорема 12.1: (Ферма) Пусть $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x_0, точка x_0 является точкой локального экстремума. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Функция f дифференцируема в т. x_0, поэтому

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x;h)h,$$

где $\alpha(x;h) \to 0$ при $h \to 0$, точка $x_0 + h \in U(x_0)$.

Пусть x_0 — точка локального экстремума, тогда левая часть соотношения

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x;h))h$$

не меняет своего знака при изменении h в некоторой малой окрестности нуля. Если $f'(x_0) \neq 0$ то знак выражения $f'(x_0) + \alpha(x;h)$ при h близких к нулю совпадает со знаком $f'(x_0)$. Но тогда при изменении знака h будет меняться и знак всей правой части. Противоречие показывает, что $f'(x_0) = 0$. ◀

Теорема 12.2: (Ролля) Пусть $f \in C[a;b]$, f дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует $\xi \in (a;b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство: В силу непрерывности f на $[a;b]$ по теореме Вейерштрасса (теорема 10.1) найдутся $x_m, x_M \in [a;b]$, т.ч.

$$f(x_m) = \min_{[a;b]} f(x), \quad f(x_M) = \max_{[a;b]} f(x)$$

При совпадении $f(x_m) = f(x_M)$ функция является постоянной, поэтому её производная равна нулю в каждой точке $x \in (a;b)$.

Если $f(x_m) < f(x_M)$, в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек x_m, x_M обязана лежать в интервале $(a;b)$. Обозначим её через ξ, т.к. ξ — точка локального экстремума, то по теореме Ферма: $f'(\xi) = 0$. ◀