Лекция 12: Основные теоремы дифференциального исчисления

12.1 Локальные экстремумы функции

Определение 12.1: Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называется точкой локаль минимума (максимума) функции $f: E \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует $U(x_0)$ во множестве E такая, что

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (f(x_0) \geq f(x)).$$

Если неравенство строгое, то x_0 — точка строго локального минимума или максимума.

Точки максимума или минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в них — локальными экстремумами.

Теорема 12.1: (Ферма) Пусть $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x_0, точка x_0 является точкой локального экстремума. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Функция f дифференцируема в т. x_0, поэтому

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x;h)h,$$

где $\alpha(x;h) \to 0$ при $h \to 0$, точка $x_0 + h \in U(x_0)$

Пусть x_0 — точка локального экстремума, тогда левая часть соотношения

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x;h))h$$

не меняет своего знака при изменении h в некоторой малой окрестности нуля. Если $f'(x_0) \neq 0$ то знак выражения $f'(x_0) + \alpha(x;h)$ при h близких к нулю совпадает со знаком $f'(x_0)$. Но тогда при изменении знака h будет меняться и знак всей правой части. Противоречие показывает, что $f'(x_0) = 0$. ◀

Теорема 12.2: (Ролля) Пусть $f \in C[a;b]$, f дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует $\xi \in (a;b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство: В силу непрерывности f на $[a,b]$ по теореме Вейерштрасса (теорема 10.1) найдутся $x_m, x_M \in [a;b]$, т.ч.

$$f(x_m) = \min_{[a;b]} f(x), \quad f(x_M) = \max_{[a;b]} f(x)$$

При совпадении $f(x_m) = f(x_M)$ функция является постоянной, поэтому её производная равна нулю в каждой точке $x \in (a;b)$.

Если $f(x_m) < f(x_M)$, в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек x_m, x_M обязана лежать в интервале $(a;b)$. Обозначим её через ξ, т.к. ξ — точка локального экстремума, то по теореме Ферма: $f'(\xi) = 0$. ◀

12.2 Теорема о конечном приращении

Теорема 12.3 (Лагранжа о конечном приращении) Пусть $f \in C[a;b]$, f дифференцируема в $(a;b)$. Тогда найдётся точка $\xi \in (a;b)$, т.ч.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Доказательство: Покажем, что к вспомогательной функции

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

можно применить теорему Ролля. Действительно, $F \in C[a;b]$ как сумма двух непрерывных функций, она является дифференцируемой в интервале $(a;b)$ как сумма двух дифференцируемых функций. Значения

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,b-a = f(b)-f(b)+f(a) = f(a).$$

По теореме Ролля существует $\xi \in (a;b)$, т.ч.

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)\,(b-a).$$ ◀

Следствие 1: Если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) во всякой точке $x \in (a;b)$, то функция не убывает (возрастает) на $(a;b)$.

Доказательство: Пусть $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, т.ч. $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где } \xi \in (x_1; x_2).$$

Откуда вытекает, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) > f(x_1)$). ◀

Следствие 2: Пусть $f \in C[a;b]$. Функция f является постоянной на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;b)$.

Доказательство: Пусть $f'(x) \equiv 0$ на $(a;b)$, выберем $x_1, x_2 \in (a;b)$. Тогда по теореме Лагранжа между x_1 и x_2 найдётся ξ, т.ч.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

откуда $f(x_1) = f(x_2)$. ◀

Теорема 12.4: (Коши о конечных приращениях)

Пусть $x(t), y(t) \in C[\alpha;\beta]$, дифференцируемы в $(\alpha;\beta)$.

Тогда существует $\tau \in (\alpha;\beta)$, т.ч.

$$x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

Если $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in (\alpha;\beta)$, то $x(\alpha) \neq x(\beta)$ и

$$\frac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}.$$

Доказательство: Применить теорему Лагранжа к функции

$$F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha)).$$ ◀

12.3 Формула Тейлора

Определение 12.2: Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Тогда многочлен

$$P_n(x_0;x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Разность $r_n(x_0,x) := f(x) - P_n(x_0;x)$ называется остатком (n-м остаточным членом) формулы Тейлора:

$$f(x) = P_n(x_0;x) + r_n(x_0;x).$$

Теорема 12.5: Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0;x]$ ($[x;x_0]$) вместе с первыми n своими производными, а в точках интервала $(x_0;x)$ ($(x;x_0)$) она имеет производную порядка $n+1$. Тогда, если функция $\varphi \in C[x_0;x]$ ($\varphi \in C[x;x_0]$) и $\varphi'(t) \neq 0$ для всех $t \in (x_0;x)$ (для всех $t \in (x;x_0)$), то найдётся $\xi \in (x_0;x)$ ($\xi \in (x;x_0)$) такая, что

$$r_n(x_0;x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)\, n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Доказательство: Пусть I — отрезок с концами x_0, x. На отрезке I определена функция

$$F(t) = f(x) - P_n(t;x)$$

переменного t. То есть $F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$.

Отметим, что функция $F \in C(I)$ и дифференцируема во внутренних точках отрезка I, при этом

$$F'(t) = -\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

К паре $F(t)$, $\varphi(t)$ на отрезке I можно применить теорему Коши (теорема 12.4): найдётся ξ, лежащая между x_0 и x, т.ч.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Очевидно, что $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0;x)$. Поэтому

$$r_n(x_0;x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)\, n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \blacktriangleleft$$

Следствие 1: (остаток в форме Коши)

$$r_n(x_0;x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Доказательство: Положить $\varphi(t) = x - t$ ◀

Следствие 2: (остаток в форме Лагранжа)

$$r_n(x_0;x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство: Положить $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. ◀

Пример 12.1: 1) Запишем формулу Тейлора для функции $f(x)=e^x$ при $x_0=0$ (формулу Маклорена):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(0;x).$$

Остаток в форме Лагранжа

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} \cdot x^{n+1}, \quad \text{где} \quad |\xi| < |x|.$$

Поскольку для всякого фиксированного $x \in \mathbb{R}$

$$|r_n(0;x)| = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} \cdot |x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1} \cdot e^{|x|}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

мы можем записать e^x в виде бесконечной суммы

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$, где $n \in \mathbb{N}$. Остаток формулы Маклорена в форме Лагранжа

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!} \sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right) x^{n+1}, \quad |\xi| < |x|,$$

стремится к нулю при $n \to \infty$ при фиксированном $x \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

3) Аналогично,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + r_n(0;x),$$

где

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!} \cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right) x^{n+1}.$$ ◀

Локальная формула Тейлора:

Пусть I — отрезок с концом $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда если $f: I \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производные $f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ до порядка n включительно, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$, $x \in I$.