Лекция 13: Исследование функций методами дифференциального исчисления

13.1 Условия монотонности и экстремума функции

Теорема 13.1: Пусть $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда

$f'(x)>0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f возрастает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f не убывает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\equiv 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f\equiv Const$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\equiv 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\leq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f не возрастает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\leq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)<0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f убывает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\ 0$ на $(a;b)$.

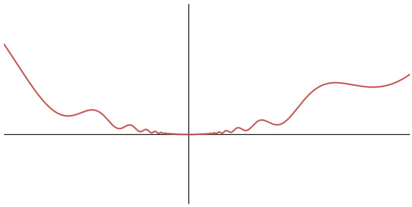
Доказательство: Для точек $x_1<x_2$, где $x_1,x_2\in(a;b)$, по теореме Лагранжа
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$
точка $x_1<\xi<x_2$. Знак $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком $f'(\xi)$. ◀

Теорема 13.2: (необходимое условия внутреннего экстремума)
Функция $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$, где x_0 является точкой экстремума. Тогда либо f не дифференцируема в т. x_0, либо $f'(x_0)=0$.

Теорема 13.3: (достаточное условия экстремума в терминах первой производной). Пусть $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$. Пусть $\mathring{U}_-(x_0):=\{x\in U(x_0):\ x<x_0\}$ и $\mathring{U}_+(x_0):=\{x\in U(x_0):\ x>x_0\}$. Тогда

1) если $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 не является точкой экстремума для f;
2) если $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 является точкой строгого локального минимума для f;
3) если $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 является точкой строгого локального максимума для f;
4) если $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 не является точкой экстремума для f.

Пример 13.1 Рассмотрим $f(x)=2x^2+x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.



Так как
$$x^2\leq f(x)\leq 3x^2,$$
точка $x_0=0$ является точкой строго локального минимума для f.
При $x\neq 0$, имеем
$$f'(x)=4x+2x\sin\tfrac{1}{x}-\cos\tfrac{1}{x},$$
она не сохраняет знак ни в какой проколотой полуокрестности 0. ◀

Доказательство: 1) По теореме 13.1 функция f строго убывает на $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$. В силу непрерывности f в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Тогда $f(x) > f(x_0)$ на $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$. Аналогично доказывается, что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_+(x_0)$. То есть функция f строго убывает в $U(x_0)$, а точка x_0 не является экстремальной.

2) Как в пункте 1) можно показать, что $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}_-(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}_+(x_0)$. Поэтому f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. ◀

Теорема 13.4: (достаточное условие экстремума в терминах высших производных) Пусть $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в т. x_0 производные до порядка n включительно ($n \geq 1$). Тогда если $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при n нечётном в т. x_0 экстремума нет, а при n чётном в т. x_0 экстремум есть (строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$; строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$).

Доказательство: Локальная формула Тейлора позволяет записать

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Перепишем приращение в виде

$$f(x) - f(x_0) = \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^n.$$

Поскольку $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то знак $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$ для x достаточно близких к x_0. При нечётном n знак $(x-x_0)^n$ меняется при переходе x через x_0, поэтому меняется и знак приращения. Следовательно точка x_0 не является точкой экстремума.

При n чётном знак $(x-x_0)^n$ не меняется при переходе x через x_0, поэтому не меняется и знак приращения. Поэтому, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ в малой окрестности т. x_0, а точка x_0 является точкой строгого локального минимума; если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ в малой окр-ти т. x_0, и точка x_0 является точкой строгого локального максимума. ◀

13.2 Условия выпуклости функции

Определение 13.1: Функция $f: (a; b) \to \mathbb{R}$ называется **выпуклой вниз** на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ и любых $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \quad (1)$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ неравенство является строгим, то функция называется строго выпуклой вверх на $(a;b)$.
Если в (1) заменить знак на противоположный, то получится определение выпуклой вверх функции.

Если $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Поэтому (1) можно записать в виде $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$.
Т.к. $x_1 < x_2$ и $x_1 \leq x \leq x_2$, учитывая равенство $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, получим иное условие выпуклости вниз функции f на $(a;b)$:

$$(1') \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \text{при } x_1 < x < x_2 \text{ и любых } x_1, x_2 \in (a;b).$$