Лекция 13: Исследование функций методами дифференциального исчисления

13.1 Условия монотонности и экстремума функции

Теорема 13.1: Пусть $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда

$f'(x)>0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f возрастает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f не убывает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\equiv 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f\equiv \mathrm{Const}$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\equiv 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)\leq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f не возрастает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\leq 0$ на $(a;b)$,

$f'(x)<0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ f убывает на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)\leq 0$ на $(a;b)$.

Доказательство: Для точек $x_1<x_2$, где $x_1,x_2\in(a;b)$, по теореме Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

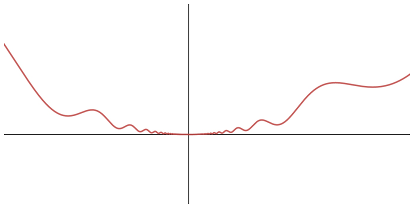
точка $x_1<\xi<x_2$. Знак $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком $f'(\xi)$.

Теорема 13.2: (необходимое условие внутреннего экстремума)
Функция $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$, где x_0 является точкой экстремума. Тогда либо f не дифференцируема в т. x_0, либо $f'(x_0)=0$.

Теорема 13.3: (достаточное условие экстремума в терминах первой производной). Пусть $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$. Пусть $\mathring{U}_-(x_0):=\{x\in U(x_0):\ x<x_0\}$ и $\mathring{U}_+(x_0):=\{x\in U(x_0):\ x>x_0\}$. Тогда

1) если $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 не является точкой экстремума для f;
2) если $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 является точкой строгого локального минимума для f;
3) если $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 является точкой строгого локального максимума для f;
4) если $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in\mathring{U}_+(x_0)$, то точка x_0 не является точкой экстремума для f.

Пример 13.1 Рассмотрим $f(x)=2x^2+x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.



Так как

$$x^2\leq f(x)\leq 3x^2,$$

точка $x_0=0$ является точкой строгого локального минимума для f. При $x\neq 0$ имеем

$$f'(x)=4x+2x\sin\tfrac{1}{x}-\cos\tfrac{1}{x},$$

она не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности 0

Доказательство: 1) По теореме 13.1 функция f строго убывает на $\mathring{U}_-(x_0)$. В силу непрерывности f в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Тогда $f(x) > f(x_0)$ на $\mathring{U}_-(x_0)$. Аналогично доказывается, что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in \mathring{U}_+(x_0)$. То есть функция f строго убывает в $U(x_0)$, а точка x_0 не является экстремальной.

2) Как в пункте 1) можно показать, что $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}_-(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}_+(x_0)$. Поэтому f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. ◀

Теорема 13.4: (достаточное условие экстремума в терминах высших производных) Пусть $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в т. x_0 производные до порядка n включительно ($n \geq 1$). Тогда если $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при n нечётном в т. x_0 экстремума нет, а при n чётном в т. x_0 экстремум есть (строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$; строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$).

Доказательство: Локальная формула Тейлора позволяет записать

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \alpha(x)(x-x_0)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Перепишем приращение в виде

$$f(x) - f(x_0) = \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right)(x-x_0)^n.$$

Поскольку $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то знак $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$ для x достаточно близких к x_0. При нечётном n знак $(x-x_0)^n$ меняется при переходе x через x_0, поэтому меняется и знак приращения. Следовательно точка x_0 не является точкой экстремума.

При n чётном знак $(x-x_0)^n$ не меняется при переходе x через x_0, поэтому не меняется и знак приращения. Поэтому, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ в малой окрестности т. x_0, а точка x_0 является точкой строго локального минимума; если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ в малой окр-ти т. x_0, и точка x_0 является точкой строгого локального максимума. ◀

13.2 Условия выпуклости функции

Определение 13.1: Функция $f: (a;b) \to \mathbb{R}$ называется выпуклой вниз на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$ и любых $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (13.1)$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ неравенство является строгим, то функция называется строго выпуклой вверх на $(a;b)$. Если в (1) заменить знак на противоположный, то получится определение выпуклой вверх функции.

Если $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Поэтому (13.1) можно записать в виде $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$
Т.к. $x_1 < x_2$ и $x_1 \leq x \leq x_2$, учитывая равенство $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, получим иное условие выпуклости вниз функции f на $(a;b)$:

$$(13.1') \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \text{при } x_1 < x < x_2 \text{ и любых } x_1, x_2 \in (a;b)$$

Теорема 13.5: Пусть функция $f: (a;b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда функция f выпукла вниз на $(a;b)$ в том и только том случае, когда её производная не убывает на $(a;b)$. Более того, если f' возрастает, то функция f строго выпукла вниз на $(a;b)$

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$: $x_1 < x_2$. В силу дифференцируемости функции f на (a,b), переходя в (13.1') к пределу по $x \to x_1$, а затем по $x \to x_2$, получим

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Поскольку точки x_1 и x_2 выбраны произвольно, то заключаем, что функция f' не убывает на $(a;b)$. Для строго выпуклой вниз функции при $x_1 < x < x_2$, где $x_1, x_2 \in (a;b)$, имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении найдутся такие $\xi_1 \in (x_1; x)$ и $\xi_2 \in (x; x_2)$, что

$$f'(x_1) \leq f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \leq f'(x_2).$$

Таким образом, для произвольных $x_1 < x_2$ из $(a;b)$ имеем $f'(x_1) < f'(x_2)$, т.е. функция f' возрастает на $(a;b)$.

$\Leftarrow$ Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. По теореме Лагранжа для некоторых ξ_1, ξ_2: $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Если f' не убывает (возрастает), то $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ $(f'(\xi_1) < f'(\xi_2))$ и выполняется условие (13.1') выпуклости вниз (строгой выпуклости) функции f на $(a;b)$

Следствие: Если функция $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ имеет на $(a;b)$ вторую производную, то она выпукла вниз на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f''(x)\geq 0$ на $(a;b)$. Функция f строго выпукла вниз на $(a;b)$, если $f''(x)>0$ на $(a;b)$.

Доказательство: вытекает непосредственно из теорем 13.5 и 13.1. ◀

Теорема 13.6: Пусть функция $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда функция f выпукла вниз на $(a;b)$ в том и только том случае, когда график f всеми своими точками лежит не ниже любой проведенной к нему касательной (т.е. при $x_0\in(a;b)$ $f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ для любого $x\in(a;b)$). Для строгой выпуклости необходимо и достаточно, чтобы все точки графика кроме точки касания лежали строго выше этой касательной. (т.е. при $x_0\in(a;b)$ $f(x)>f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ для любого $x\in(a;b)$).

Доказательство: $\Rightarrow$ Рассмотрим уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0,f(x_0))$:

$$y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Тогда $f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0)$, где точка ξ лежит между x и x_0. Функция f выпукла вниз на $(a;b)$, то по теореме 13.5 производная $f'(x)$ не убывает на $(a;b)$, тогда $\operatorname{sgn}(f'(\xi)-f'(x_0))=\operatorname{sgn}(x-x_0)$. Следовательно, разность $f(x)-y(x)\geq 0$ на $(a;b)$. Если f строго выпукла вниз, то f' возрастает на $(a;b)$ и $f(x)-y(x)>0$ на $(a;b)\setminus\{x\}$.

$\Leftarrow$ Пусть для любых точек $x,x_0\in(a;b)$ разность

$$(13.2)\quad f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geq 0.$$

Тогда при $x<x_0$ и $x_0<x$ имеем неравенства

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq f'(x_0)\quad\text{и}\quad\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq f'(x_0),\ \text{соответственно.}$$

Значит при любых $x_1<x<x_2$ из интервала $(a;b)$ имеем условие выпуклости вниз на $(a;b)$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Если бы мы стартовали в (13.2) со строгого неравенства, то мы бы пришли к условию строгой выпуклости вниз функции f на $(a;b)$. ◀

Пример 13.2: Из теоремы 13.6 вытекают очевидным образом неравенства

$e^x>1+x$ при $x\neq 0$,

$\ln x<x-1$ при $x>0$ и $x\neq 1$. ◀

Определение 13.2: Пусть $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция. Тогда, если f выпукла вниз (вверх) на $\mathring{U}_-(x_0)$ и выпукла вверх (вниз) на $\mathring{U}_+(x_0)$, то точка $(x_0,f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции f.

Теорема 13.7: (неравенство Иенсена) Пусть $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ – выпуклая вниз на $(a;b)$ функция, $x_1,\dots,x_n$ – точки интервала $(a;b)$. Тогда, если $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ такие, что $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,n}$ и $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$, то

(13.3) $$f(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_nf(x_n).$$

Доказательство: При $n=2$ неравенство (13.3) совпадает с условием (13.1) выпуклости вниз функции f на $(a;b)$.

Предположим, что (13.3) выполняется для некоторого $n=p-1$. Пусть для определённости в наборе $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ число $\alpha_p>0$, значит $\beta=\alpha_2+\dots+\alpha_p>0$, а $\frac{\alpha_2}{\beta}+\dots+\frac{\alpha_p}{\beta}=1$. Тогда

$$f(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p)=f\left(\alpha_1x_1+\beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\dots+\frac{\alpha_p}{\beta}x_p\right)\right)\leq\left(\underset{\text{т.к. } \alpha_1+\beta=1}{\text{в силу выпуклости}}\right)\leq$$

$$\leq\alpha_1f(x_1)+\beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\dots+\frac{\alpha_p}{\beta}x_p\right)\leq\left(\text{по предположению индукции}\right)\leq$$

$$\leq\alpha_1f(x_1)+\beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2)+\dots+\frac{\alpha_p}{\beta}f(x_p)\right)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\dots+\alpha_pf(x_p).$$

Следовательно, согласно принципа математической индукции (13.3) справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$. ◀

Если функция f строго выпукла вниз на $(a;b)$, то при $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ в неравенстве (13.3) равенство достигается только при $x_1=\dots=x_n$.

Для выпуклой вверх функции справедливо аналогичное неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)\geq\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_nf(x_n).$$

Пример 13.3: 1) Поскольку $(\ln x)^{(2)}=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$, функция $f(x)=\ln x$ строго выпукла вверх на $\mathbb{R}_{>0}:=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$. Поэтому в силу неравенства Иенсена

$$\alpha_1\ln x_1+\dots+\alpha_n\ln x_n\leq\ln(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)$$

или

(13.4) $$x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$$

при $x_i\geq 0$, $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,n}$ и $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$.

Положив в последнем неравенстве $\alpha_1=\dots=\alpha_n=\frac{1}{n}$, получим классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\leq\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

между средним геометрическим и средним арифметическим n неотрицательных чисел, в котором равенство возможно тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Положив в (13.4) $\alpha_1=\frac{1}{p}$ и $\alpha_2=\frac{1}{q}$, т.к. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, при $x_1>0$, $x_2>0$, получим неравенство Юнга

$$x_1^{\frac{1}{p}}x_2^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2,$$

где равенство возможно только при $x_1=x_2$. ◀

13.3 Правило Лопиталя

Теорема 13.8: (правило Лопиталя) Пусть функции $f: (a;b) \to \mathbb{R}$ и $g: (a;b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, т.ч. $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$ и

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (-\infty \le A \le +\infty).$$

Тогда, если выполняется

1) $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a+0$;

либо

2) $g(x) \to \infty$ при $x \to a+0$,

то
$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Аналогичное утверждения справедливо, если $x \to b-0$

13.4 Полное исследование графика функции

Определение 13.3: Прямая с уравнением $y = c_0 + c_1 x$ называется (наклонной) асимптотой графика функции при $x \to \pm\infty$, если

$$f(x) - (c_0 + c_1 x) = o(1) \text{ при } x \to \pm\infty$$

Из этого равенства вытекает, что

$$c_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad c_0 = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - c_1 x).$$

Асимптота существует тогда и только тогда, когда оба этих предела существуют.

Определение 13.4: Если при $x \to a \pm 0$ модуль $|f(x)| \to \infty$, то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f.

Общая схема (исследования) построения графика функции:

1°. Найти область определения функции, область значения функции
2°. Указать специальные свойства функции: чётность, нечётность, периодичность и т.п.
3°. Исследовать функцию на непрерывность, найти асимптоты, если они существуют.
4°. Найти промежутки монотонности функции и указать её локальные экстремумы.
5°. Выяснить характер выпуклости графика и указать точки перегиба.
6°. Отметить характерные точки графика: точки пересечения с осями, имеющиеся доступные для вычисления точки на графике.
7°. Построить график функции.