# Лекция 14: Первообразная и неопределённый интеграл

## (14.1) Падение тел в атмосфере

Пусть функция $v(t)$ описывает скорость падения тела под действием силы тяжести. При отсутствии сопротивления воздуха из второго закона Ньютона $ma=F$ и закона всемирного тяготения

$$F(t) = G\frac{Mm}{(R+h(t))^2} \approx G\frac{Mm}{R^2} = gm \quad (\text{при } h \ll R).$$

Для скоростей от 0 до 80 м/с будем считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела; коэффициент пропорциональности $\alpha$ зависит от формы тела. Тогда мы приходим к следующему (дифференциальному) уравнению

$$m\dot{v}(t) = mg - \alpha v,$$

которое эквивалентно

(14.1) $$\dot{v}(t) = -\beta v + g, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha}{m}.$$

Сделав в (14.1) замену $-\beta v + g = f(t)$, приходим к соотношению

$$f'(t) = -\beta f(t).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\beta \iff \left(\ln|f(t)|\right)' = -\beta \iff \ln|f(t)| = -\beta t + C$$

$$\iff |f(t)| = e^{C}\cdot e^{-\beta t} \iff f(t) = Ke^{-\beta(t)} \Rightarrow K = f(0).$$

Таким образом, если $v(0)=v_0$, то

$$v(t) = \frac{1}{\beta}g + \left(v_0 - \frac{1}{\beta}\right)e^{-\beta t} \quad \text{или} \quad \boxed{v(t) = \frac{m}{\alpha}g + \left(v_0 - \frac{m}{\alpha}g\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t}}.$$

При $\alpha > 0$ скорость падающего тела стабилизируется $v(t) \approx \frac{m}{\alpha}g$, т.е. скорость падения в атмосфере зависит от формы тела и от массы.
При малых $\alpha > 0$ скорость $v(t) = \frac{m}{\alpha}g + \left(v_0 - \frac{m}{\alpha}g\right)\left(1 - \frac{\alpha}{m}t + o(\alpha)\right) = v_0 + g(t) + o(\alpha)$, т.е. при $\alpha \to +0$ скорость равна $v(t) = v_0 + gt$, т.е. решению уравнения $\dot{v}(t) = g$.

Оценим как быстро происходит выход на предельную скорость падения в атмосфере. Пусть парашют рассчитан на то, что человек средней комплекции приземляется при раскрытом парашюте со скоростью порядка 10 м/с (т.е. $\frac{m}{\alpha} \approx 1$). Тогда, раскрыв парашют после затяжного свободного падения, когда скорость падения составляет примерно 50 м/с, находим, что

$$v(t) = 10 + (50-10)e^{-t} = 10 + 40e^{-t},$$

а значит через $t = 3$с скорость упадёт до $\approx 12$ м/с.

## 14.2 Первообразная

Как мы видели в предыдущем пункте важно уметь находить функцию по соотношению, которому удовлетворяет её производная. Простейшее, но очень важное, такое соотношение на неизвестную функцию $F(x)$ имеет вид

$$F'(x) = f(x), \tag{14.2}$$

где функция $f(x)$ известна.

**Определение 14.1:** Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на числовом промежутке $E$ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ дифференцируема на $E$ и во всех точках $x \in E$ выполняется соотношение (14.2) или равносильное соотношение

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{14.2'}$$

Из теоремы Лагранжа о конечном приращении вытекает

**Утверждение 14.1:** Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f$ на промежутке $E$. Тогда $F_1(x) - F_2(x) = Const$ на $E$.

**Пример 14.1:** Как мы знаем на всей числовой прямой

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

В тоже время на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

$$\left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

При этом на $(0; +\infty)$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = 0,$$

но на $(-\infty; 0)$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x - (\pi + \operatorname{arctg} x) = -\pi.$$ ◀

Договоримся символом $\int f(x)\,dx$, называемым **неопределённым интегралом**, обозначать любую из первообразных функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке.

Из утверждения 1 вытекает, что если $F(x)$ — какая-то конкретная первообразная функции $f(x)$ на промежутке, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Более того,

$$d\int f(x)\,dx = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{14.3}$$

и

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{14.3'}$$

Таким образом, формулы (14.3) и (14.3') показывают, что операции дифференцирования и неопределённого интегрирования являются взаимно обратными (с точностью до некоторой постоянной в формуле (14.3')).

**Предложение 14.1:** Для неопределённого интеграла выполняются соотношения

1°. (линейность неопределённого интеграла)

$$\int (\alpha u(x) + \beta v(x))dx = \alpha \int u(x)dx + \beta \int v(x)dx + C, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2°. (интегрирование по частям)

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)dx + C.$$

или

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) + C.$$

3°. (замена переменной в неопределённом интеграле)

Если на промежутке $I_x$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

а $\varphi: I_t \to I_x$ — непрерывно дифференцируемая функция, переводящая промежуток $I_t$ в $I_x$, то

$$\int (f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Указанные соотношения 1°–3° позволяют во многих случаях сводить нахождение первообразных к уже известным, образующим таблицу неопределённых интегралов:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq 1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + \tilde{C}, \end{cases} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Пример 14.2: 1) Найдём неопределённый интеграл от многочлена

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\, dx \overset{1^0}{=} a_0 \int 1\, dx + a_1 \int x\, dx + \ldots + a_n \int x^n\, dx =$$

$$= C + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

2) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

3) $\int \ln x\, dx = \Big/ u(x) = \ln x,\ v(x) = x \Big/ \overset{2^0}{=} x\ln x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

$= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C.$

4) $\int \frac{t\, dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} = \Big/ x = t^2+1 \Big/ \overset{3^0}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$

5) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \overset{3^0}{=} \int \frac{du}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} = \int \frac{d\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u} \overset{3^0}{=} \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$

$= \ln|\operatorname{tg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

Пример 14.3: (циклический интеграл)

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, d\cos bx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\, de^{ax} =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\, d\sin bx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx$$

Откуда

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C. \blacktriangleleft$$

При вычислении производной элементарной функции мы всегда получаем элементарную функцию, иными словами операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций. В тоже время неопределённые интегралы

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

не выражаются в элементарных функциях, хотя это не так и просто увидеть. Тем не менее некоторые классы элементарных функций имеют первообразные в виде композиции элементарных функций.

## 14.3 Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Хорошо известно, что такой многочлен можно представить в виде

$$Q(x) = A(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_l)^{k_l} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_nx+q_n)^{m_n},$$

где $A \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,l}$ — корни, а дискриминанты $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j = \overline{1,n}$, т.е. у $x^2+p_jx+q_j$ нет вещественных корней.

Саму же дробь можно переписать в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right),$$

где $p(x)$ — многочлен, результат деления многочлена $P$ на $Q$ при условии $\deg P \geq \deg Q$, а вещественные константы $A_{jk}$, $B_{jk}$, $C_{jk}$ можно однозначно определить **методом неопределённых коэффициентов**.

Пример 14.4: Рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{-4x^2-2x-6}{x^4-1} = \frac{-4x^2-2x-6}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Будем искать её разложение в виде

$$\frac{-4x^2-2x-6}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D}{x^4-1}.$$

Значения $A, B, C$ и $D$ определятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A-B+D = -4 \\ A+B-C = -2 \\ A-B-D = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2D = 2,\ D = 1, \\ 2C = 2,\ C = 1, \\ \begin{cases} A+B = -1 \\ A-B = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -3, \\ B = 2. \end{array} \end{array}$$

Таким образом,

$$R(x) = \frac{-3}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

В силу свойства линейности 1° нужно уметь вычислять интегралы от простейших дробей вида

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}.$$

Начнём с дроби первого вида, при $k \neq 1$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-i}}{1-i} + C = \frac{1}{(1-i)(x-a)^{i-1}} + C,$$

в то же время при $k=1$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C.$$

Для интегрирования второй дроби перепишем её в виде

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Bx+C}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}, \quad \text{где} \quad p = -2\alpha,\ q = \alpha^2+\beta^2.$$

Тогда интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \alpha+\beta t \\ dx = \beta\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{\beta^{2m-1}}\int \frac{(B\alpha+D)+B\beta t}{(1+t^2)^m}\,dt$$

является представляется в виде линейной комбинации интегралов

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$

Заметим, что в силу $t\,dt = \frac{1}{2}d(t^2+1)$ легко найти, что при $m>1$

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\,\frac{(1+t^2)^{1-m}}{1-m} + C = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-m)(1+t^2)^{m-1}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-m)\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right)^{m-1}} + C = \frac{1}{2}\,\frac{\beta^{2m-2}}{(1-m)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{m-1}} + C.$$

Если же $m=1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right) + C.$$

Теперь вычислим $I_m := \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$. При $m=1$ это табличный интеграл

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

Если $m>1$, то

$$I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^m}dt = I_{m-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^m} \ominus$$

(последний интеграл преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям, где в качестве

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}, \quad v = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(m-1)(1+t^2)^{m-1}}\Big)$$

$$\ominus\; I_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-1}I_{m-1} = \frac{2m-3}{2m-2}I_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)(1+t^2)^{m-1}}$$

Тем самым мы пришли к реккурентному соотношению

$$I_m = \frac{2m-3}{2m-2}I_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)(1+t^2)^{m-1}}, \quad m>1,$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} t + C,$$

из которого находим, что

$$I_m = \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\operatorname{arctg} t + r(t) + C,$$

где $r(t)$ – рациональная дробь от $t$, выражение для неё можно выписать явно. Остаётся сделать только обратную замену $t = (x-\alpha)/\beta$.

Тем самым мы доказали.

**Теорема 141:** Первообразная любой рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ выражается через рациональные функции, а также трансцендентные функции $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$, точнее через $\ln(x-a)$, $\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)$ и $\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}$.