Лекция II

1 Принцип Архимеда

Напомним, доказанное в прошлой лекции утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $h > 0$. *Тогда для всякого* $x \in \mathbb{R}$ *существует единственное* $k \in \mathbb{Z}$ *такое, что*

$$(k-1)h \le x < kh.$$

Непосредственно из принципа Архимеда вытекают следствия.

Следствие 1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Следствие 2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$ *такое, что* $x \ge 0$, *и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $x < \frac{1}{n}$. *Тогда* $x = 0$.

Следствие 3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! k \in \mathbb{Z}$ *такое, что* $k \le x < k+1$.[1]

Следствие 4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *таких, что* $a < b$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ *такое, что* $a < r < b$.

Доказательство. С помощью следствия 1 выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$0 < \frac{1}{n} < b - a.$$

Выбрав $h = \frac{1}{n}$ и $x = a$, из принципа Архимеда получим, что существует $m \in \mathbb{Z}$, для которого выполняется

$$\frac{m-1}{n} \le a < \frac{m}{n}.$$

Предположим, что $b \le \frac{m}{n}$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{m-1}{n} \le a < b \le \frac{m}{n},$$

из которого вытекает, что $b - a \le \frac{1}{n}$. Полученное противоречие доказывает, что $\frac{m}{n} < b$.

Положив $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, имеем $a < r < b$. $\square$

[1] Число k называется *целой частью числа* x и обозначается $[x]$. Разность $\{x\} := x - [x]$ называют *дробной частью числа* x.

2 Лемма о вложенных отрезках

Определение 1. Функция натурального аргумента называется *последовательностью*. Значение этой функции в $n \in \mathbb{N}$ называется *n-ым членом последовательности.*

Определение 2. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность множеств. Тогда $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется *последовательностью вложенных множеств*, если

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots .$$

Лемма 1 (Принцип Коши-Кантора)**.** *Пусть $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность вложенных отрезков $I_i = [a_i, b_i]$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такая, что для всех $i \in \mathbb{N}$ точка $c \in I_i$.*

Более того, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то есть $\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{N}$ такое, что $|I_k| < \varepsilon$, то такая точка c является единственной.

Доказательство. Рассмотрим множества $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$ – левых и правых границ отрезков I_i, соответственно. Между элементами этих множеств имеет место неравенство

$$a_i \leq b_j.$$

В противном случае (то есть, когда $b_j < a_i$), отрезки I_i и I_j не пересекаются, а это противоречит тому, что по условию леммы $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ является последовательностью вложенных отрезков.

Применим к множествам A и B аксиому полноты (аксиома VII из лекции I). По этой аксиоме существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $a_i \in A$ и всех $b_j \in B$ выполняется $a_i \leq c \leq b_j$, а значит и неравенство

$$a_i \leq c \leq b_i,$$

которое гласит, что $c \in I_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что существуют две точки c_1 и c_2, которые лежат во всех отрезках нашей последовательности. Если эти точки различны, то для определенности считаем, что $c_1 < c_2$. Итак для всех $i \in \mathbb{N}$ мы имеем, что

$$a_i \leq c_1 < c_2 \leq b_i.$$

Очевидно, что разность $0 < c_2 - c_1$ меньше, чем длина $|I_i| := b_i - a_i$ любого отрезка I_i. Поэтому в последовательности $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ не может быть отрезков, длина которых меньше, чем $c_2 - c_1 > 0$. Следовательно, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то существует единственная общая точка отрезков из последовательности. □

3 Лемма о конечном покрытии

Определение 3. Система $S = \{X\}$ множеств *покрывает* множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{X \in S} X$. Сама система S называется при этом *покрытием* множества Y.

Лемма 2 (Принцип Бореля-Лебега). *Пусть* $S = \{U\}$ *– покрытие отрезка* $[a, b]$ *интервалами. Тогда существует конечный набор* $\{U_1, \dots, U_d\}$ *интервалов такой, что* $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{d} U_i$.

Иными словами, из любого покрытия отрезка интервалами можно извлечь конечное подпокрытие.

Доказательство. Обозначим через $I_1 = [a, b]$. Пусть отрезок I_1 нельзя покрыть конечным числом интервалов из системы S, тогда и одну из его половин тоже нельзя покрыть конечным числом интервалов из этой системы. Обозначим эту половину через I_2. Повторив это рассуждение с отрезком I_2, мы получим одну из его половин I_3, которую нельзя покрыть конечным числом интервалов из S, и так далее.

Тем самым, возникает последовательность вложенных отрезков

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_i \supset \dots,$$

среди которых могут быть отрезки сколь угодно малой длины, так как $|I_i| = \frac{b-a}{2^i}$. По лемме о вложенных отрезках существует единственная точка $c \in \mathbb{R}$, лежащая во всех отрезках I_i этой последовательности.

Поскольку отрезок $[a, b]$ содержит точку c, а сам содержится в объединении интервалов системы S, то найдется интервал $U = (\alpha, \beta)$ системы, который содержит точку c. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$ – расстояние от точки c до ближайшей границы интервала. Поскольку в последовательности $\{I_i\}$ могут быть отрезки сколь угодно малой длины, то найдется отрезок I_k такой, что $|I_k| < \varepsilon$. В силу того, что $c \in I_k$, отрезок I_k содержится в интервале $U = (\alpha, \beta)$. Мы получили противоречие с тем, что отрезок I_k нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. □

4 Лемма о предельной точке

Определение 4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Тогда точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной* точкой множества X, если любая окрестность[2] этой точки содержит бесконечно много точек из X.

Лемма 3 (Принцип Больцано-Вейерштрасса). *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$ *– бесконечное ограниченное*[3] *множество. Тогда существует хотя бы одна предельная точка множества* X.

Доказательство. Поскольку X – ограниченное подмножество $\mathbb{R}$, то существует отрезок $[a, b]$ такой, что $X \subset [a, b]$. Мы хотим показать, что хотя бы одна точка этого отрезка является предельной точкой множества X.

Предположим обратное: ни одна точка отрезка не является предельной точкой множества X. Это означает, что у любой точки $x \in [a, b]$ существует окрестность $U(x)$ такая, что мощность $|U(x) \cap X| < \infty$. Иными словами, окрестность $U(x)$ либо вообще не содержит точек из X, либо содержит лишь конечное

[2] *Окрестность* точки – это любой интервал, содержащий данную точку.

[3] Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если $\exists C > 0$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется $|x| < C$.

число таких точек. Система интервалов $\{U(x)\}_{x\in[a,b]}$ образует покрытие отрезка $[a,b]$ и самого множества X:

$$X \subset [a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U(x).$$

По лемме о конечном покрытии (лемма 2) найдутся точки $x_1,\dots,x_d \in [a,b]$ такие, что

$$X \subset [a,b] \subset U(x_1) \cup \dots \cup U(x_d).$$

Каждый из интервалов $U(x_i)$ содержит не более конечного числа точек из X, поэтому и объединение всех таких интервалов содержит не более конечного числа таких точек. Следовательно, множество X является конечным. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$