Лекция III

1 Предел числовой последовательности и его простейшие свойства

Определение 1. Функция натурального аргумента $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *числовой последовательностью*. Значение $x_n := f(n)$ этой функции в $n \in \mathbb{N}$ называется *n-ым членом последовательности*. Саму последовательность при этом принято обозначать $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

Определение 2. Вещественное число a называется *пределом*[1] числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Обозначив ε-окрестность точки a через $V_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, мы можем записать условие (1) в эквивалентном виде:

$$\forall V_\varepsilon(a)\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in V_\varepsilon(a). \tag{1$'$}$$

Определим ε-окрестности

$$V_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}) \cup (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty),\ V_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}),\ V_\varepsilon(+\infty) = (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty).$$

Тогда $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ является пределом (конечным или бесконечным), если и только, если выполняется условие (1$'$).

Естественно последовательность, имеющую конечный предел, называть *сходящейся*, а последовательность, у которой предела не существует (в частности, он может быть бесконечным), — *расходящейся*.

Заметив, что всякая окрестность $V(a)$ содержит некоторую ε-окрестность точки a, мы получаем еще одно эквивалентное условие:

$$\forall V(a)\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in V(a). \tag{1$''$}$$

Итак, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности $V(a)$ содержится бесконечное число членов последовательности, а вне этой окрестности не более чем конечное число ее членов.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $x_n = n^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N}$. Для всякого $k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1},\ x_{2k} = 2k.$$

[1] Пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Никакое ненулевое число a не может быть пределом последовательности, так как в окрестности $V(a) = (a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2})$ лежит конечное число точек вида x_{2k-1}, в то время как вне этой окрестности лежит бесконечное число таких точек. Точка $a = 0$ не является пределом последовательности, поскольку все точки вида x_{2k} лежат вне окрестности $V(0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Исходя из определения предела, последовательность $\{x_n\}$ является расходящейся тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

Докажем, что последовательность не может иметь двух пределов.

Теорема 1. *Если числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится, то ее предел является единственным.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся числовая последовательность. Предположим, что

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n,\ b = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \neq b$.

Положим $\varepsilon_0 = \frac{|b-a|}{3}$. С одной стороны, по определению предела последовательности мы получаем, что

$$\exists N_a \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_a \Rightarrow x_n \in V_{\varepsilon_0}(a),$$

$$\exists N_b \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_b \Rightarrow x_n \in V_{\varepsilon_0}(b).$$

Тогда для $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ все члены последовательности x_n лежат в пересечении $V_{\varepsilon_0}(a) \cap V_{\varepsilon_0}(b)$. С другой стороны, так как $|b - a|$ – это расстояние между точками a и b на прямой $\mathbb{R}$, окрестности $V_{\varepsilon_0}(a)$ и $V_{\varepsilon_0}(b)$ не пересекаются. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 2. *Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся числовая последовательность. Тогда $\{x_n\}$ является ограниченной последовательностью*[2].

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$, тогда для $\varepsilon = 1$ существует натуральное число N_0 такое, что для всех $n \geq N_0$ выполняются неравенства

$$|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < 1 + a.$$

Откуда следует, что $|x_n| < \max\{|a - 1|, |1 + a|\}$ при всех $n \geq N_0$. Приняв

$$C = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N_0-1}|, |a - 1|, |1 + a|\},$$

мы получим, что $|x_n| < C$ уже для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, $\{x_n\}$ является ограниченной последовательностью. □

[2] Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует константа $C > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| < C$.

2 Арифметические свойства предела числовой последовательности

Отметим, что для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ мы можем определить новые последовательности $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n \cdot y_n\}$, которые называются *суммой* и *произведением* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, соответственно. Если $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то можно определить и *частное* $\{x_n/y_n\}$.

Теорема 3. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – сходящиеся числовые последовательности, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда*

1. *Последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится, и*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$$
2. *Последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится, и*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$
3. *Последовательность $\{x_n/y_n\}$ сходится, и*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b},$$
если $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем первый пункт теоремы. По определению,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\, \exists N_a \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_a \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\, \exists N_b \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_b \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ для $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$ мы будем иметь,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По определению это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. □

3 Предельный переход и неравенства

Теорема 4. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где $a < b$. Тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq N$ выполняется $x_n < y_n$.*

Доказательство. По аксиоме о полноте (лекция I аксиома VII) найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что $a < c < b$. Для $b - c > 0$ и $c - a > 0$ по определению предела последовательности существуют номера $N' \in \mathbb{N}$ и $N'' \in \mathbb{N}$, для которых

$$a - (c - a) < x_n < a + (c - a) = c \text{ при } n \geq N',$$

и

$$c = b - (b - c) < y_n < b + (b - c) \text{ при } n \geq N''.$$

Поэтому для $n \geq N := \max\{N', N''\}$ выполняется неравенство

$$x_n < c < y_n.$$

□

Следствие 1. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности такие, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда*

1. *Если $x_n > y_n$ для $n \in \mathbb{N}$, то $a \geq b$.*
2. *Если $x_n \geq y_n$ для $n \in \mathbb{N}$, то $a \geq b$.*

Доказательство. Пусть $x_n > y_n$ или $x_n \geq y_n$. Если $a < b$, то по теореме $x_n < y_n$, начиная с некоторого номера. Противоречие доказывает следствие. □

Теорема 5 (лемма о двух милиционерах)**.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности такие, что*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. По определению предела последовательности выполняются условия

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N' \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N' \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N'' \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N'' \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для $n \geq N := \max\{N', N''\}$ имеем неравенство

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

которое влечет $|y_n - a| < \varepsilon$. Таким образом $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. □