Лекция V

1 Предел функции

Будем рассматривать функцию $f : D \to \mathbb{R}$ и точку $a \in \mathbb{R}$, которая является предельной для области определения функции D.

Определение 1 (По Коши)**.** Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *в точке* $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что как только $x \in D$ удовлетворяет условию $0 < |x - a| < \delta$, так сразу выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Короче условие может быть записано в следующем виде:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \tag{1}$$

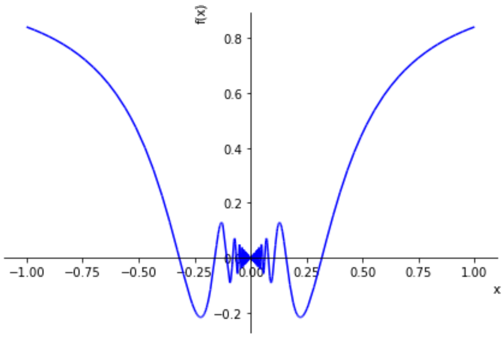
Используя язык окрестностей[1], это условие принимает эквивалентную форму:

$$\forall V_\varepsilon(A)\, \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a)\, \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap D\, (f(x) \in V_\varepsilon(A)). \tag{1$'$}$$

Тот факт, что предел функции f в точке a равен A записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ с областью определения $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



[1]Напомним, что $V_\varepsilon(A) := (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки $A \in \mathbb{R}$, а $\overset{\circ}{U}_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ – *проколотой δ-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$.

Докажем по определению, что $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. В силу ограниченности функции $\sin\frac{1}{x}$ справедлива оценка

$$|f(x) - 0| = \left|x\sin\tfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\tfrac{1}{x}\right| \leq |x|,$$

из которой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно положить $\delta = \varepsilon$ в условии (1). Тогда, если $0 < |x| < \varepsilon$, то и $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Пример 2. Рассмотрим функцию *сигнум*,

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Мы собираемся доказать, что не существует предела функции $\operatorname{sgn} x$ в точке $a = 0$. С этой целью запишем отрицание условия (1′) того, что $A \in \mathbb{R}$ является пределом:

$$\exists V_\varepsilon(A)\ \forall \mathring{U}_\delta(a)\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D\ (f(x) \notin V_\varepsilon(A)). \tag{2}$$

Очевидно, что любая точка $A \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ удовлетворяет этому условию, поскольку она обладает ε-окрестностью, которая вообще не содержит значений функции. Поэтому рассматриваемое число A не может являться пределом функции.

Если теперь A – это одна из точек -1, 0 или 1, то, взяв в качестве ε-окрестности интервал $V(A) = (A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2})$, мы получим, что обе точки -1 и 1 не могут лежать в нем одновременно. В любой проколотой δ-окрестности $\mathring{U}_\delta(0)$ содержатся как положительные x так и отрицательные. Поэтому в $\mathring{U}_\delta(0)$ всегда найдется x такой, что $f(x) \notin V(A)$.

Таким образом, ни одно вещественное число не может быть пределом функции сигнум в точке 0.

Дадим определение предела функции в терминах последовательностей.

Определение 2 (По Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *в точке* $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Лемма 1. *Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом по Коши функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда число $A \in \mathbb{R}$ является пределом по Гейне функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть A – предел по Коши функции f, и $\{x_n\}$ – последовательность точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, сходящаяся к точке a. По определению предела по Коши функции имеем,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

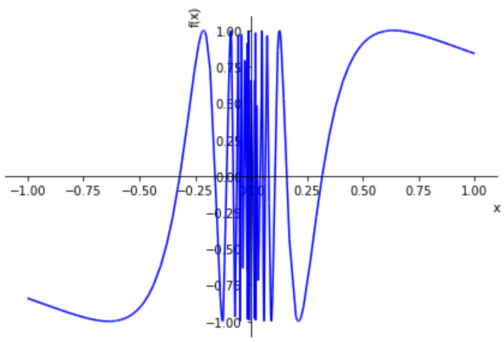
Тогда в силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ для числа δ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_n - a| < \delta$ при всех $n \geq N$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, а это означает, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Достаточность будем доказывать от обратного. Пусть A не является пределом по Коши функции f в точке a, то есть существует ε-окрестность $V(A)$ точки A

такая, что во всякой проколотой δ-окрестности точки a найдется x со свойством $f(x) \notin V(A)$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ в $\frac{1}{n}$-окрестности точки a найдется $x_n \neq a$ такой, что $f(x_n) \notin V(A)$. Таким образом, последовательность таких точек x_n будет сходиться к a, а последовательность $\{f(x_n)\}$ не будет сходиться к A. Но это означает, что A не является пределом по Гейне функции f в точке a. $\square$

Определение предела по Гейне особенно удобно, когда мы хотим доказать несуществование предела функции в точке a: достаточно предъявить две сходящиеся к a последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ такие, что последовательности точек $f(x_n')$ и $f(x_n'')$ сходятся к разным пределам.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ с областью определения $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Докажем, что не существует $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Рассмотрим две последовательности:

$$x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \text{ и } x_n'' = \frac{1}{2\pi n},$$

которые, очевидно, сходятся к 0 при $n \to \infty$. При этом последовательности с общими членами

$$f(x_n') = 1 \text{ и } f(x_n'') = 0$$

сходятся к 1 и 0, соответственно. Поэтому у функции $\sin\frac{1}{x}$ не существует предела в точке 0.

Благодаря эквивалентности определений по Коши и Гейне, предел функции обладает многими свойствами, аналогичными уже рассмотренным свойствам предела числовой последовательности. Например, из леммы 1 следует, что предел функции является единственным.

2 Арифметические свойства предела функции

Теорема 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ и $g : D \to \mathbb{R}$ – функции такие, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = A \cdot B$.

3. *Если* $g(x) \neq 0$ *для всех* $x \in D$ *и* $B \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Вытекает из аналогичной теоремы для последовательностей (теорема 3 лекция III) и леммы 1. □

3 Предел функции и неравенства

Теорема 2. *Пусть* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *– функции с областью определения* D *такие, что*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A,$$

и для всех $x \in D$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Тогда $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Вытекает из леммы о двух милиционерах (теорема 5 лекция III) и леммы 1. □