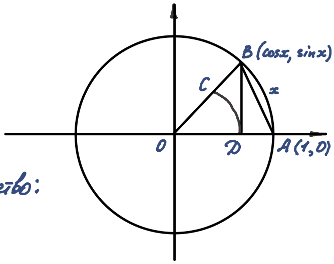
Лекция 6:

6.1 Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.



Пусть угол $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим секторы $\measuredangle AOB$, $\measuredangle DOC$ и треугольник $\triangle AOB$. Для площадей этих объектов справедливо неравенство:

$$S_{\measuredangle DOC} < S_{\triangle AOB} < S_{\measuredangle AOB}.$$

Тем самым имеем

$$\frac{1}{2}\cos x\,(x\cos x) < \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x.$$

Откуда делением на $\frac{1}{2}x$ получим, что $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.
Поскольку все функции, участвующие в этом неравенстве, являются чётными, то

(1) $$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } 0<|x|<\frac{\pi}{2}.$$

Из неравенства (1) вытекает, что

(2) $$|\sin x| \le |x| \text{ для всех } x\in\mathbb{R}.$$

Поскольку $|\sin x| \le 1$, а $|x| \ge \frac{\pi}{2} > 1$. Равенство возможно только в точке $x=0$.

Так как $0 \le |\sin x| \le |x|$ и $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, то по теореме 2 лекции V заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$, что равносильно $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Для $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ из (1) вытекает оценка

$$1-\sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x) = 1 - (\lim\limits_{x\to 0}\sin x)(\lim\limits_{x\to 0}\sin x) = 1-0\cdot 0=1$. Поэтому по теореме 2 лекции V получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

6.2 Критерий Коши

Определение 1: **Колебанием функции** $f: X\to\mathbb{R}$ на множестве $E\subset\mathbb{R}$ называется величина

$$\omega(f;E) := \sup_{x_1,x_2\in E}|f(x_1)-f(x_2)|.$$

Пример 1: $\omega(x;[-1;1])=2$, $\omega(x,(-1;1))=2$, $\omega(x^2;[-1;3])=9$, $\omega(\operatorname{sgn}x;[0;3])=1$, $\omega(\operatorname{sgn}x;(0;3])=0$.

Теорема 1: Пусть точка x_0 – предельная для области определения X функции f. Тогда функция f имеет предел в точке $x_0 \Leftrightarrow$ когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окрестность $\mathring{U}(x_0)$ такая, что $\omega(f; \mathring{U}(x_0) \cap X) < \varepsilon$

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $A \in \mathbb{R}$. Тогда по определению $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathring{U}(x_0)$ $\forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Поэтому для любых $x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ выполняется

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - A) + (A - f(x_2))| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

а, значит, и $\omega(f; \mathring{U}(x_0) \cap X) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Для $\varepsilon = 1$ $\exists \mathring{U}_1(x_0)$ такая, что $\omega(f; \mathring{U}_1(x_0) \cap X) < 1$;
для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists \mathring{U}_2(x_0)$ такая, что $\omega(f; \mathring{U}_2(x_0) \cap X) < 1/2$;
... ...

Тем самым мы имеем последовательность $\mathring{U}_1(x_0), \mathring{U}_2(x_0), \dots, \mathring{U}_n(x_0), \dots$ такую, что $\omega(f; \mathring{U}_n(x_0) \cap X) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Выберем в каждом $\mathring{U}_n(x_0) \cap X$ по точке x_n.

Если $x \in \mathring{U}_n(x_0) \cap \mathring{U}_m(x_0) \cap X$, то $|f(x_n) - f(x_m)| =$

(3) $\quad = |(f(x_n) - f(x)) + (f(x) - f(x_m))| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$.

Поэтому последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, а значит по критерию Коши для последовательностей $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, где $A \in \mathbb{R}$

Переходя в (3) к пределу по $m \to \infty$, получим, что

$$|f(x_n) - A| \leq \frac{1}{n}.$$

Тогда, т.к. $\omega(f; \mathring{U}_n(x_0) \cap X) < \frac{1}{n}$, для $x \in \mathring{U}_n(x_0) \cap X$ и $n \geq [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$

$$|f(x) - A| = |(f(x) - f(x_n)) + (f(x_n) - A)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. ◀

6.3 Предел композиции функций

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, т.ч. $\mathcal{E}(f) \subset Y$. Тогда определена функция $g \circ f: X \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, которая называется **композицией функций** f и g или сложной функцией.

Теорема 2: (о пределе композиции функций):

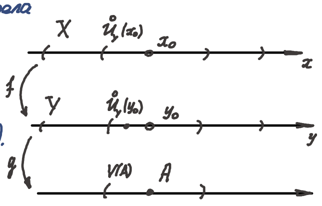
Пусть $g: Y \to \mathbb{R}$, точка y_0 предельная для Y и существует $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$.
Пусть X – множество, x_0 – его предельная точка, а функция $f: X \to Y$, т.ч. для любой $\mathring{U}_Y(y_0) := \mathring{U}(y_0) \cap Y$ найдётся $\mathring{U}_X(x_0)$ со свойством $f(\mathring{U}_X(x_0)) \subset \mathring{U}_Y(y_0)$. Тогда композиция $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ определена и

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

(x_0 и y_0 могут быть и бесконечно удалёнными точками)

Доказательство: Композиция $g\circ f: X\to\mathbb{R}$ определена, т.к. $E(f)\subset Y$.

Пусть $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$. По определению предела для любой окрестности $V(A)$ найдётся $\mathring{U}_Y(y_0)$, т.ч. $g(\mathring{U}_Y(y_0))\subset V(A)$ (т.е. для $y\in\mathring{U}_Y(y_0)$ значения $g(y)\in V(A)$). По условию для $\mathring{U}_Y(y_0)$ найдётся $\mathring{U}_X(x_0)$, т.ч. $f(\mathring{U}_X(x_0))\subset\mathring{U}_Y(y_0)$. Тогда



$$(g\circ f)(\mathring{U}_X(x_0)) := g(f(\mathring{U}_X(x_0))) \subset g(\mathring{U}_Y(y_0))\subset V(A).$$

Откуда, следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=A$. ◄

Пример 2: Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$. Зададим $g(y)=\frac{\sin y}{y}$, $Y=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $f(x)=2x$, $X=\mathbb{R}$.

Мы уже знаем, что $\frac{\sin y}{y}\xrightarrow[y\to 0]{}1$ (первый замечательный предел). Поэтому, чтобы воспользоваться теоремой 2, нужно показать, что для всякой проколотой окрестности $\mathring{U}_Y(0)$ найдётся $\mathring{U}_X(0)$, т.ч. $f(\mathring{U}_X(0))\subset\mathring{U}_Y(0)$. Это так, поскольку $\mathring{U}_Y(0)=\{y\in\mathbb{R}\mid \alpha<y<\beta \text{ и } y\neq 0\}$, тогда для $\mathring{U}_X(0)=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{\alpha}{2}<x<\frac{\beta}{2} \text{ и } x\neq 0\}$ имеем $f(\mathring{U}_X(0))\subset\mathring{U}_Y(0)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=0.$$

Пример 3: Рассмотрим $g(y)=|\operatorname{sgn}(y)|$, для которой $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=1$, и функцию $y=f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, определенную на $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для которой $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Однако функция $(g\circ f)(x)=|\operatorname{sgn}(x\sin\frac{1}{x})|$ не имеет предела при $x\to 0$, т.к при $x_n'=\frac{1}{\pi n}$ последовательность $(g\circ f)(x_n')=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, а при $x_n''=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ последовательность $(g\circ f)(x_n'')=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

Пример 4: Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Пусть $Y=\mathbb{N}$, $\mathring{U}_Y(\infty)=\{n\in\mathbb{N}: n\geq N\}$, $X=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$, $\mathring{U}_X(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>R\}$, где $N\in\mathbb{N}$ и $R>0$. Пусть $f: X\to Y$, т.ч. $f(x)=[x]$, где $[x]$ – целая часть x.

Для всякой $\mathring{U}_Y(\infty)=\{n\geq N\}$ можно найти $\mathring{U}_X(+\infty)=\{x>N+1\}$ со свойством, что для $x\in\{x>N+1\}$ целая часть $[x]\in\{n\geq N\}$.

Рассмотрим $g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ и $g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, которые имеют своим пределом при $n\to\infty$ число e. Тогда по теореме 2

$$(g\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},\quad (g_1\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]},\quad (g_2\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

стремятся при $x\to+\infty$ к числу e.

Заметим, что при $x\geq 1$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{(-t)\to-\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

Осталось только заметить, что из $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ вытекает

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

В силу $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_+>0\ \forall x\ (x>\delta_+)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$,
а в силу $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_->0\ \forall x\ (x<\delta_-)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$.
Тогда для $\forall\varepsilon>0$ при $|x|>\delta=\max\{|\delta_-|,|\delta_+|\}$ будем иметь, что

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon.$$

По определению это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. ◀