

Лекция 7:

7.1) Второй замечательный предел

Пример 1: Докажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Пусть $\mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+(\infty) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$, $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $X_+(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > R\}$, где $N \in \mathbb{N}$ и $R > 0$. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{Y}$, т.е. $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть x .

Для всякой $\mathbb{N}_+(\infty) = \{n \geq N\}$ можно найти $X_+(\infty) = \{x > N+1\}$ со свойством, что для $x \in \{x > N+1\}$ целая часть $[x] \in \{n \geq N\}$.

Рассмотрим $g_1(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$, $g_2(n) = (1 + \frac{1}{n+1})^n$ и $g_3(n) = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, которые имеют своим пределом при $n \rightarrow \infty$ число e . Тогда по теореме 2 $(g_1 \circ f)(x) = (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]}$, $(g_2 \circ f)(x) = (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]}$, $(g_3 \circ f)(x) = (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}$ стремятся при $x \rightarrow \infty$ к числу e .

Заметим, что при $x \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$. Далее, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{(-x) \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t-1})^t = e$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t-1})^{t-1} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t-1})^{t-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

Осталось только заметить, что из $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ вытекает

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

В силу $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, где $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_+ > 0 \forall x (x > \delta_+) \Rightarrow |(1 + \frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$, а в силу $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, где $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_- > 0 \forall x (x < -\delta_-) \Rightarrow |(1 + \frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ при $|x| > \delta = \max\{|\delta_-|, |\delta_+|\}$ будем иметь, что

$$\left| (1 + \frac{1}{x})^x - e \right| < \varepsilon.$$

Это определение это и означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

7.2) Предел монотонных функций

Определение 7.1: Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется

- 1) **убывающей** на $X \Leftrightarrow \forall x', x'' \in X$, т.е. $x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$;
- 2) **невозрастающей** на $X \Leftrightarrow \forall x', x'' \in X$, т.е. $x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'')$;
- 3) **неубывающей** на $X \Leftrightarrow \forall x', x'' \in X$, т.е. $x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$;
- 4) **возрастающей** на $X \Leftrightarrow \forall x', x'' \in X$, т.е. $x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$.

Функция называется **монотонной** на X , если она одного из типов 1)–4).

Теорема 7.1: (о пределе монотонной функции) Неубывающая на множестве X функция f имеет предел при $x \rightarrow s$, где $s = \sup X$, тогда и только тогда, когда f ограничена сверху (т.е. $\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in X \Rightarrow f(x) < C$). Аналогично, невозрастающая на множестве X функция f имеет предел при $x \rightarrow i$, где $i = \inf X$, тогда и только тогда, когда f ограничена снизу.

Доказательство: Пусть существует $\lim_{x \rightarrow s} f(x)$, и он равен A . Тогда по определению предела найдётся проколотая окрестность $U(s)$ точки s во множестве X , т.е. функция f ограничена на $U(s)$. Поскольку функция f неубывающая, то f ограничена сверху на X .

Пусть неубывающая функция f ограничена сверху на X . Докажем, что $\lim_{x \rightarrow s} f(x)$ существует. В силу ограниченности сверху существует $A = \sup_{x \in X} f(x)$. По определению точной верхней грани $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in X$, т.е.

$$A - \varepsilon < f(x') \leq A < A + \varepsilon.$$

В силу неубывания для всех $x \in X$, т.е. $x' < x$, будем иметь

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Так как $s = \sup X$, то $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = A$.

Второй случай рассматривается аналогично. ◀

7.3 Сравнение функций

Определение 7.2: Функция f называется **бесконечно малой по сравнению с функцией g** при $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ или x_0 — одна из бесконечностей) \Leftrightarrow когда существует $U(x_0)$, т.е. в ней выполняется соотношение

$$f(x) = \alpha(x)g(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Обозначение: $f = o(g)$ („ f является o -малой от g “)

Если $f = o(g)$ при $x \rightarrow x_0$, и g — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, то f называется **бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с g** при $x \rightarrow x_0$.

Если $f = o(g)$ при $x \rightarrow x_0$, и f, g — бесконечно большие при $x \rightarrow x_0$, то функция g называется **бесконечно большей более высокого порядка по сравнению с f** при $x \rightarrow x_0$.

Пример 7.2: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, т.к. $x^2 = x \cdot x$.

2) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow \infty$, т.к. $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$ при $x \neq 0$.

3) $f = o(1)$ при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

4) $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ при $x \rightarrow \infty$ и $\frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}$ — бесконечно малая более

5) $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^2})$ при $x \rightarrow 0$ и $\frac{1}{x} \rightarrow \infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ высшего порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}$ — бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

Определение 7.3: Будем писать $f = O(g)$ при $x \rightarrow x_0$ (f является O -большим относительно g) \Leftrightarrow когда существует $\mathcal{U}(x_0)$, т.е. в ней выполнено соотношение $f(x) = \beta(x)g(x)$, где $\beta(x)$ — ограниченная в $\mathcal{U}(x_0)$ функция

Функции f и g являются **функциями одного порядка** при $x \rightarrow x_0$ \Leftrightarrow когда при $x \rightarrow x_0$ $f = O(g)$ и $g = O(f)$. Это, очевидно, эквивалентно тому, что в некоторой $\mathcal{U}(x_0)$ выполняется

$$C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)|,$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — фиксированные константы

Пример 7.3: 1) $(\sin x + \frac{1}{x})x = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$, т.к. $|\sin x + \frac{1}{x}| \leq 2$ для достаточно больших $|x|$.

2) Заметим, что $x \leq (2 + \sin x)x \leq 3x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому функции x и $(2 + \sin x)x$ являются функциями одного порядка при $x \rightarrow \infty$. Однако, x и $(1 + \sin x)x$ уже не являются функциями одного порядка при $x \rightarrow \infty$.

Утверждение 7.1: При $x \rightarrow x_0$

1) $O(f) + O(f) = O(f)$;

2) $o(f)$ является $O(f)$;

3) $O(f) + O(f) = O(f)$;

4) $o(f) + O(f) = O(f)$;

5) Если $g(x) \neq 0$, то $\frac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ и $\frac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

Доказательство: 1) Рассмотрим сумму двух функций, которые являются $o(f)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x) = \alpha_3(x)f(x),$$

где $\alpha_3(x) := \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \rightarrow 0 + 0$ при $x \rightarrow x_0$.

2) Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, то $\alpha(x)$ ограничена в некоторой $\mathcal{U}(x_0)$.

3) Рассмотрим сумму двух функций, которые являются $O(f)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$\beta_1(x)f(x) + \beta_2(x)f(x) = (\beta_1(x) + \beta_2(x))f(x) = \beta_3(x)f(x),$$

где $\beta_3(x) := \beta_1(x) + \beta_2(x)$ является ограниченной в некоторой $\mathcal{U}(x_0)$.

4) Вытекает из 2) и 3)

5) Заметим, что

$$\frac{O(f(x))}{g(x)} = \frac{\alpha(x)f(x)}{g(x)} = \alpha(x) \frac{f(x)}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

и

$$\frac{O(f(x))}{g(x)} = \frac{\beta(x)f(x)}{g(x)} = \beta(x) \frac{f(x)}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Определение 7.4: Функция f эквивалентна функции g при $x \rightarrow x_0$ ($f \sim g$ при $x \rightarrow x_0$)

\Leftrightarrow когда существует $\mathcal{U}(x_0)$, т.е. в ней выполнено соотношение $f(x) = \gamma(x)g(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 1$

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 1 \Leftrightarrow \gamma(x) = 1 + \alpha(x)$ в некоторой $U(x_0)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Пример 7.4: 1) $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$ или $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{?}{=} \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) = \ln e = 1.$$

2) $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$ или $e^{-1} \sim x$ при $x \rightarrow 0$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left/ \begin{array}{l} \text{замена} \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right/ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

3) $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ при $x \rightarrow 0$ или $(1+x)^a \sim 1 + ax$ при $x \rightarrow 0$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \cdot \frac{d \ln(1+x)}{x} = \left/ \begin{array}{l} \text{замена} \\ t = a \ln(1+x) \end{array} \right/ = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = a$$

Утверждение 7.2: Пусть $f_1 \sim f_2$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)g(x)$, если один из этих пределов существует.

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x)f_2(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)g(x) \quad \blacktriangleleft$$

Пример 7.5: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

7.4) Таблица асимптотических формул

При $x \rightarrow 0$ справедливы асимптотические разложения

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

Отметим, что

$$O(x^{n+1}) = x^{n+1} \cdot O(1) = x^n \cdot x \cdot O(1) = x^n \cdot o(1) = o(x^n) \text{ при } x \rightarrow 0.$$