Лекция 8: Непрерывность

8.1 Определение непрерывной функции

Начнём с самой простой ситуации.

Определение 8.1: Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется непрерывной в т. x_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(1) \qquad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

или на языке окрестностей:

$$(1') \qquad \forall V(f(a))\ \exists \mathcal{U}(x_0),\ \text{т.ч.}\ f(\mathcal{U}(x_0))\subset V(f(a)).$$

Сравнив (1) с условием (1) лекции V, видим, что условие непрерывности функции f в точке x_0 эквивалентно тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Тогда в силу критерия Коши (теорема 1 лекция VI) мы получаем, что

функция f непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ когда

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \mathcal{U}_\delta(x_0),\ \text{т.ч.}\ \omega(f,\mathcal{U}_\delta(x_0))<\varepsilon$$

(последнее можно переписать в виде $\omega(f,a)=0$, где $\omega(f,a):=\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(f,\mathcal{U}_\delta(x_0))$)

Согласно определению 1 функция, заданная на отрезке $[a,b]$, не может быть непрерывной в точках a и b. Расширим понятие непрерывности, чтобы поправить это.

Определение 8.2: Пусть $f: E\to\mathbb{R}$, точка $x_0\in E$ является предельной точкой множества E. Тогда f непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ когда

$$(2) \qquad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in E:\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

В частности, функция $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ непрерывна в т. a $\Leftrightarrow$ когда выполняется условие

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}:\ 0\le x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

которое эквивалентно $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$. Аналогично, функция f непрерывна в точке b $\Leftrightarrow$ когда выполняется условие

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}:\ -\delta<x-a\le 0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

эквивалентное $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

Определение 8.3: Функция f непрерывна на множестве E $\Leftrightarrow$ когда она непрерывна в каждой точке этого множества. В этом случае, мы пишем $f\in C(E;\mathbb{R})$ или $f\in C(E)$.

Пример 8.1: Пусть $f(x)=x$, докажем, что $f\in C(\mathbb{R})$. Выберем произвольную точку $x_0\in\mathbb{R}$ и рассмотрим величину $|f(x)-f(x_0)|$:

$$|x-x_0|<\varepsilon, \quad \text{если } |x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

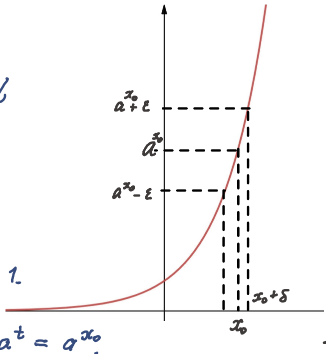
Следовательно, функция непрерывна в произвольной точке $x_0\in\mathbb{R}$, а значит и непрерывна и на всём $\mathbb{R}$ ◀

Пример 8.2: Функции $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Действительно, для произвольной т. $x_0\in\mathbb{R}$ при $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ справедливы оценки:

$$\left|\sin x-\sin x_0\right| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\,\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon,$$

$$\left|\cos x-\cos x_0\right| = \left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\,\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon.$$

Пример 8.3: Функция $f(x)=a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$



В начале докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$

Если $a>1$, в силу того, что $a^{\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$, то для всякого $\varepsilon>0$ можно подобрать $n\in\mathbb{N}$, т.ч.

$$1-\varepsilon<a^{-1/n}<a^{1/n}<1+\varepsilon.$$

Тогда при $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ будем иметь

$$1-\varepsilon<a^{-1/n}<a^x<a^{1/n}<1+\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1.$

Если $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to 0}a^x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1/a)^x}=\frac{1}{1}=1.$

Теперь вычислим

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^t=a^{x_0}.$$ ◀

Утверждение 8.1: Пусть $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$. Функция f непрерывна в т. x_0 $\Leftrightarrow$ когда $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$.

Доказательство: Вытекает из определения односторонних пределов. Напомним, что **пределом справа** функции f в т. x_0 называется величина A, т.ч.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f):\ 0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Условие $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f):\ -\delta<x-x_0<0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ определяет **предел слева** функции f в точке x_0.

Очевидно, что существование и равенство односторонних пределов в т. x_0 является необходимым и достаточным условием существования предела функции f в точке x_0 ◀

Пример 8.4: Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn}x:=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ Очевидно, что

$$\lim_{x\to -0}\operatorname{sgn}x=-1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +0}\operatorname{sgn}x=1.$$

Односторонние пределы не совпадают, поэтому по утверждению 8.1 функция не является непрерывной в т. 0. ◀

8.2 Точки разрыва

Определение 8.4: Точка x_0, в которой функция f не является непрерывной, называется точкой разрыва.
(Как видно из определений содержательным это понятие является, когда x_0 является предельной точкой области определения функции f)
В положительном смысле, x_0 является точкой разрыва функции $f: E \to \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ когда $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Пример 8.5: Рассмотрим $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$. Предел $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, однако $f(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$, следовательно $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$. Поэтому т 0 – точка разрыва функции f.

Определение 8.5: Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** для функции $f: E \to \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ когда существуют односторонние пределы

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

Определение 8.6: Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** для функции $f: E \to \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ когда не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

Пример 8.6: 1) Точка 0 является точкой устранимого разрыва для функции $|\operatorname{sgn} x|$
2) Точка 0 является точкой разрыва первого рода для функции $\operatorname{sgn} x$, поскольку
$\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = 1$.
3) Точка 0 является точкой разрыва второго рода для функций

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin\frac{1}{x},$$

т.к. $\lim\limits_{x \to \pm 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

Пример 8.7: 1) Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке вещественной прямой $\mathbb{R}$, все её точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

2) Функция Римана $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ где } \frac{m}{n} \text{ – несократимая дробь} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Можно показать, что $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$ для $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, т.е. $R(x)$ непрерывна в любой иррациональной точке. Рациональные точки яв-ся точками разрыва второго рода.