Лекция 9: Свойства непрерывных функций

9.1 Локальные свойства непрерывных функций

Теорема 9.1: Пусть $f: \tilde{U}(x_0) \to \mathbb{R}$ – функция, непрерывная в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда выполняются свойства:

1°. Существует $U(x_0)$, т.ч. функция f ограничена в $U(x_0)$, т.е. $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in U(x_0)$, где C – некоторое положительное число.

2°. Если $f(a) > 0$, то существует $U(x_0)$, т.ч. $f(x) > 0$ для $x \in U(x_0)$. Если $f(a) < 0$, то существует $U(x_0)$, т.ч. $f(x) < 0$ для $x \in U(x_0)$. Иными словами, непрерывная функция сохраняет свой знак в некоторой окрестности точки непрерывности

3°. Если функция $g: \tilde{U}(x_0) \to \mathbb{R}$ непрерывна в т. x_0, то функции $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$, $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ (при условии $g(x) \neq 0$) определены в $\tilde{U}(x_0)$ и непрерывны в точке x_0

Доказательство: 1°. Если функция f непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда существует окрестность $U(x_0)$, в которой $f(x)$ ограничена.

2°. Для определённости считаем, что $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности f в т. x_0 для $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ мы можем подобрать $\delta > 0$ такую, что при $x \in U(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ будет выполняться неравенство

$$0 < f(x_0) - f(x_0)/2 = \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

3°. Вытекает из арифметических свойств предела функции (теорема 1 лекция 5) ◀

Пример 9.1: 1) Всякий многочлен $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

2) Рациональная функция $R(x) = P(x)/Q(x)$ (P, Q – многочлены) непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, где $Q(x) \neq 0$, т.е. на своей области определения.

Теорема 9.2: Если функция $g: Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в т. $y_0 \in Y$, функция $f: X \to Y$ непрерывна в т. x_0, т.ч. $f(x_0) = y_0$, то композиция $g \circ f$ определена на X и непрерывна в т. x_0.

Доказательство: В силу непрерывности функции f в точке $x_0 \in X$ для всякой окрестности $V(f(x_0))$ точки $f(x_0) = y_0$ найдётся такая окрестность $U(x_0)$, что $f(U(x_0)) \subset V(y_0)$. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой о пределе композиции функций (теорема 2 лекции 6):

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Таким образом, композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 ◀

9.2 Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема 9.3: (Больцано - Коши о промежуточном значении):
Пусть $f \in C[a;b]$ и $f(a)f(b)<0$ (это означает, что на концах отрезка функция принимает значения разных знаков). Тогда $\exists c \in [a;b]$, такая что $f(c)=0$.

Доказательство: Рассмотрим середину $c_1 = \frac{a+b}{2}$ отрезка $[a;b]$. Если $f(c_1)\neq 0$, то либо на концах отрезка $[a;c_1]$, либо на концах отрезка $[c_1;b]$ функция принимает значения различных знаков. Обозначим половину отрезка $[a;b]$ с указанным свойством через $[a_1;b_1]$, а его середину через c_2. Будем продолжать процедуру построения отрезков $[a_n;b_n]$ и их середин c_{n+1}.
Тогда либо для какого-то $n \in \mathbb{N}$ значения $f(c_n)=0$, либо мы получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, длины которых стремятся к нулю, и на концах которых $f(a_n)f(b_n)<0$. По лемме о вложенных отрезках (лемма 1 лекция 2) существует единственная c, лежащая во всех отрезках.
Обозначим через x_n', x_n'' границы $[a_n;b_n]$ такие, что $f(x_n')<0$, $f(x_n'')>0$, соответственно. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = c$. В силу непрерывности функции f и связи предельного перехода с неравенствами (следствие 1 теоремы 4 лекция 3) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = f(c) \leq 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c) \geq 0.$$

Откуда вытекает $f(c)=0$. ◀

Следствие 1: Пусть функция φ непрерывна на интервале $(\alpha;\beta)$, для некоторых $a,b \in (\alpha,\beta)$ значения $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$. Тогда для всех чисел C между A и B найдётся точка c между a и b такая, что $\varphi(c)=C$.

Доказательство: Пусть I — отрезок с концами a и b. Рассмотрим функцию $f(x)=\varphi(x)-C$, непрерывную на I. Заметим, произведение

$$f(a)f(b) = (A-C)(B-C) < 0.$$

Поэтому по только что доказанной теореме найдётся точка $c \in I$ такая, что $f(c)=0 \Leftrightarrow \varphi(c)=0$ ◀

Для удобства обозначим через $B[a,b]$ множество всех функций, ограниченных на отрезке $[a;b]$. То есть $f \in B[a,b]$ означает, что существуют такие $m, M \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется двойное неравенство

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Теорема 9.4: (Вейерштрасса о максимальном значении)

Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда $f \in B[a;b]$. Более того, существуют такие точки $x_m, x_M \in [a,b]$, что

$$f(x_m) = \min_{[a;b]} f(x), \quad f(x_M) = \max_{[a;b]} f(x).$$

Доказательство: По условию функция f непрерывна на $E=[a;b]$. Тогда по пункту 1° теоремы 9.1 для всякой точки $x \in E$ найдётся $U_E(x) := U(x) \cap [a;b]$ такая, что f ограничена на $U_E(x)$, то есть найдутся $m_x, M_x \in \mathbb{R}$:

$$m_x \leq f(t) \leq M_x, \quad \text{если} \quad t \in U_E(x).$$

Указанные окрестности $U(x)$ покрывают отрезок $[a,b]$. По лемме Бореля-Лебега (лемма 2 лекции 2) среди них найдутся интервалы $U(x_1), \dots, U(x_n)$, покрывающие отрезок $[a;b]$: $[a;b] \subset U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$.

На каждом $U_E(x_k)$ функция ограничена: $m_{x_k} \leq f(x) \leq M_{x_k}$ для $x \in U_E(x_k)$. Поэтому, положив $m := \min\{m_{x_1}, \dots, m_{x_n}\}$, $M := \max\{M_{x_1}, \dots, M_{x_n}\}$, получим

$$m \leq f(x) \leq M$$

для всех $x \in [a;b]$, т.е. $f \in B[a;b]$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $M = \sup_{[a,b]} f(x)$. Предполагаем, что он не достигается, т.е. для всех $x \in [a;b]$ значения $f(x) < M$. Тогда мы можем рассмотреть функцию $\frac{1}{M-f(x)}$, которая непрерывна на $[a;b]$, а значит, как мы только что доказали, ограничена на $[a;b]$.

С другой стороны, по определению супремума для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in [a,b]$, т.ч. $M - f(x_\varepsilon) < \varepsilon$. А это означает, что функция $\frac{1}{M-f(x)}$ может принимать сколь угодно большие значения, т.е. не является ограниченной.

Полученное противоречие доказывает, что $\exists x_M \in [a;b] : f(x_M) = M$.

Аналогично доказывается и то, что точная нижняя грань значений функции f на отрезке $[a,b]$ достигается. ◀

Пример 9.2: 1) Функция $f(x) = x \in C(0;1)$, $\inf_{(0;1)} f(x) = 0$, $\sup_{(0;1)} f(x) = 1$, т.е. функция ограничена на $(0;1)$, но ни точная нижняя грань, ни точная верхняя грань не достигаются функцией на интервале.

2) Функция $f(x) = 1/x \in C(0;1)$, $\inf_{(0;1)} f(x) = 1$, $\sup_{(0;1)} f(x) = +\infty$, т.е. функция даже не является ограниченной на интервале $(0;1)$. ◀