① Докажем с помощью математической индукции, что

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (*)$$

для всех $n\in\mathbb{N}$.

При $n=1$ левая часть доказываемого равенства равна 1, а правая — $1^2=1$. Таким образом $(*)$ выполняется при $n=1$.

Предположим, что для некоторого $p\in\mathbb{N}$ равенство

$$1+3+\ldots+(2p-1)=p^2 \qquad (**)$$

верно. Тогда справедливо и равенство

$$1+3+\ldots+(2p-1)+(2p+1)\overset{(**)}{=}p^2+2p+1=(p+1)^2.$$

Следовательно, $(*)$ выполняется для всех $n\in\mathbb{N}$. $\blacktriangleleft$

② Используя формулу бинома Ньютона, найдём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^k-(n^k+2kn^{k-1})}{n^{k-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k+2kn^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot n^{k-2}\cdot(2)^2+o(n^{k-2})-n^k-2kn^{k-1}}{n^{k-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k(k-1)}{2}\cdot n^{k-2}\cdot(2)^2+o(n^{k-2})}{n^{k-2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{2k(k-1)+\frac{o(n^{k-2})}{n^{k-2}}\right\}=2k(k-1). \quad \blacktriangleleft$$

③ Величина $S(n)=1+\ldots+(n+1)=\big/$сумма арифметической прогрессии$\big/=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

④

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+1}=\frac{12}{3}=4.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin 5x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{5x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{5x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{5+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{5}.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3+1-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}+\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}+\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right\}=0+0=0.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$ ◀

⑤ Докажем, что последовательность $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{24+\ldots\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24}}}}_{n \text{ раз}}$ сходится.

1) Заметим, что последовательность возрастающая.

2) Докажем, что $x_n < 3$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поскольку $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{27} = 3$, то $x_1 < 3$. Предположим, что $x_{n-1} < 3$. Тогда $x_n = \sqrt[3]{24 + x_{n-1}} < \sqrt[3]{24+3} = \sqrt[3]{27} = 3$. Следовательно, согласно принципу математической индукции $x_n < 3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Иными словами, $\{x_n\}$ ограничена сверху.

Возрастающая и ограниченная сверху последовательность по теореме о пределе монотонной последовательности имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из равенства $x_n = \sqrt[3]{24 + x_{n-1}}$ получаем предельным переходом, что

$$\lambda = \sqrt[3]{24+\lambda}.$$

Откуда находим, что $\lambda = 3$. ◀