Лекция 1: Интегрируемые по Риману функции

1.1 Интеграл Римана

Для отрезка $[a;b]$ рассмотрим его **разбиение** P, т.е. набор точек $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка (все $x_i \in [a,b]$), т.ч.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

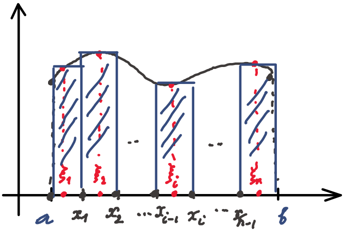
Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, называются **отрезками разбиения** P, их длины обозначим через $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, а $\lambda(P) := \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ будем называть **параметром разбиения** P.

Набор точек $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, т.ч. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для $i = 1, \ldots, n$, назовём **набором отмеченных точек разбиения** P.

Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P, ξ) – пара из разбиения и его набора отмеченных точек. Тогда сумма

$$\sigma(f; P; \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** функции f, соответствующей паре (P, ξ).



Определение 1.1: Число $A \in \mathbb{R}$ называется **интегралом Римана** функции f на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для всякого разбиения P отрезка $[a;b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ и всякого набора ξ отмеченных точек этого разбиения выполняется

$$\left| \sigma(f, P, \xi) - A \right| < \varepsilon.$$

В случае выполнения условия из определения 1.1 будем писать, что

$$A = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi).$$

Интеграл функции f на $[a,b]$ обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Используя его, мы можем записать, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Будем говорить, что функция **интегрируема (по Риману)** на $[a;b]$, если $\int_a^b f(x)dx$ существует. Пространство всех таких функций будем обозначать через $\mathcal{R}[a;b]$.

Пример 1.1: Пусть $f = C$ на $[a;b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a;b]$, т.к. для всяких P и ξ

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} C \Delta x_i = C(b-a) \xrightarrow[\lambda(P) \to 0]{} C(b-a), \text{ т.е. } \int_a^b C dx = C(b-a)$$

(1.2) Условия интегрируемости функции

Теорема 1.1 (критерий Коши)

$f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall P', P''$ с параметрами $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$ и любых наборов отмеченных точек ξ', ξ'' разбиения P' и P'', соответственно, выполняется

$$\left| \sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'') \right| < \varepsilon.$$

Теорема 1.2 (необходимое условие интегрируемости)

$$f \in R[a;b] \Rightarrow f \in B[a;b]$$

Доказательство: Пусть $f \notin B[a,b]$. Тогда для любого разбиения P отрезка $[a;b]$ найдётся отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, т.ч. $f \notin B[x_{i-1}, x_i]$. Для сколь угодно мелкого разбиения P и наборов отмеченных точек ξ' и ξ'', различающихся только точками ξ_i' и ξ_i'' получим, что величину

$$\left| \sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'') \right| = \left| f(\xi_i') - f(\xi_i'') \right| \Delta x_i$$

можно сделать сколь угодно большой за счёт выбора ξ_i''. Следовательно, из критерия Коши $\Rightarrow$ что $f \notin R[a;b]$ ◀

Разбиение $\tilde{P}$ отрезка $[a;b]$ называется **продолжением** разбиения P, если $\tilde{P}$ получено добавлением к P конечного числа точек.

Если $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, то точки продолжения $\tilde{P}$ удобно нумеровать двумя индексами:

$$\tilde{P} = \{x_{ij}\}, \quad \text{т.ч.} \quad x_{i-1} = x_{i0} < \ldots < x_{in_i} = x_i.$$

Теорема 1.3 (достаточное условие интегрируемости)

Пусть $f \in B[a;b]$. Тогда $f \in R[a;b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т.ч. для любого разбиения P отрезка $[a,b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i < \varepsilon,$$

где $\omega(f; [x_{i-1}; x_i]) = \sup\limits_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

Доказательство: Пусть P — разбиение отрезка $[a;b]$ и $\tilde{P}$ — его продолжение. Рассмотрим

$$\left| \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P, \xi) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i) \Delta x_{ij} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \left(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i) \right) \Delta x_{ij} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \left| f(\xi_{ij}) - f(\xi_i) \right| \Delta x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i.$$

Из нашего рассуждения следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, т.ч. для любого разбиения P отрезка $[a;b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$, любого его продолжения $\tilde{P}$, а наборов $\xi, \tilde{\xi}$ отмеченных точек этих разбиений выполняется

$$|\sigma(f; \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P; \xi)| < \varepsilon/2.$$

Заметим, что для разбиений P' и P'' объединение $\tilde{P} = P' \cup P''$ будет продолжением как P', так и P''. Поэтому для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, т.ч. для $\forall P', P''$ с $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$ и для любых наборов ξ', ξ'' отмеченных точек этих разбиений будет справедливо:

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| = |(\sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P'', \xi'')) + (\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}))| \le$$

$$\le |\sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P'', \xi'')| + |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По критерию Коши это влечёт, $f \in R[a;b]$ ◀

Следствие 1: ! $f \in C[a;b] \Rightarrow f \in R[a;b]$.

Доказательство: Если $f \in C[a;b]$, то по теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a;b]$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in [a;b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Значит для всякого разбиения P отрезка $[a;b]$ с $\lambda(P) < \delta$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Из теоремы 1.3 следует, что $f \in R[a;b]$ ◀

Следствие 2: ! $f \in B[a;b]$ и f имеет конечное число точек разрыва на $[a;b]$ $\Rightarrow f \in R[a;b]$.

Следствие 3: ! f монотонна на $[a;b] \Rightarrow f \in R[a;b]$.

Доказательство: Заметим, что в силу монотонности $\omega(f; [a;b]) = |f(b) - f(a)|$. Если f постоянна, то очевидно (пример 1.1) она интегрируема на $[a;b]$. Далее в доказательстве будем считать, что f непостоянна. Тогда $f(b) - f(a) \neq 0$, и мы мы можем выбрать $\delta = \varepsilon / |f(b) - f(a)|$. Для разбиения P с $\lambda(P) < \delta$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) = \delta \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = /\text{в силу монотонности}/$$

$$= \delta \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| = \delta |f(b) - f(a)| = \varepsilon.$$

Из теоремы 1.3 следует, что $f \in R[a;b]$ ◀

Пример 1.2: Монотонная на отрезке функция может иметь бесконечное число точек разрыва. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2^{n-1}}, & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \le x < 1-\frac{1}{2^n}, \quad n \in N \\ 1, & x=1. \end{cases}$$