Лекция 10: Основные теоремы дифференциального исчисления

10.1 Теорема о среднем

Теорема 10.1: Пусть $f\colon G\to\mathbb{R}$ – функция, определённая в области $G\subset\mathbb{R}^m$; отрезок $[x;x+h]\subset G$. Тогда, если $f\in C([x;x+h])$ и дифференцируема в точках из $(x;x+h)$, то существует $\xi\in(x;x+h)$, т.ч.

$$f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h \quad \text{или} \quad f(x^1+h^1,\dots,x^m+h^m)-f(x^1,\dots,x^m)=\partial_i f(\xi^1,\dots,\xi^m)\,h^i.$$

Доказательство: Введём вспомогательную функцию $F(t)=f(x+th)$, определенную на отрезке $[0;1]\subset\mathbb{R}$. Заметим, что $F\in C[0;1]$ и F дифференцируема во внутренних точках отрезка $[0;1]$. Поэтому по теореме Лагранжа существует т. $\theta\in(0;1)$ такая, что

$$F(1)-F(0)=F'(\theta) \quad\Leftrightarrow\quad f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)\,h, \text{ где } x+\theta h\in(x;x+h). \blacktriangleleft$$

Следствие: Пусть $f\colon G\to\mathbb{R}$ дифференцируема в области $G\subset\mathbb{R}^m$, а её дифференциал равен нулю в любой точке $x\in G$. Тогда f постоянна в G.

Доказательство: В начале докажем, что утверждение верно для функции, определённой в некотором шаре $B(x,r)$.

Из равенства нулю дифференциала в любой точке $B(x,r)$ следует, что

$$\partial_1 f(p)=\dots=\partial_m f(p)=0 \quad \text{в любой т. } p\in B(x,r).$$

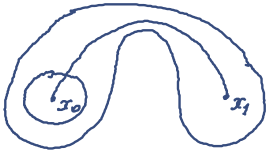
Тогда, если $y\in B(x,r)$, то и весь отрезок $[x;y]\subset B(x,r)$, то по теореме

$$f(y)-f(x)=f'(\xi)h=0\cdot h=0,$$

т.е. значения f в любой точке шара совпадают со значениями в его центре x.

Пусть теперь точки $x_0,x_1\in G$. В силу того, что G – область, найдется путь $t\to x(t)$ в G, т.ч. $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$.

Так как G открыто, то существует шар $B(x_0;r)\subset G$. В силу непрерывности отображения $x(t)$ найдется $\delta>0$, т.ч. $x(t)\in B(x_0,r)$ для всех $0\le t\le\delta$, а значит по доказанному $f(x(t))\equiv f(x_0)$ на $[0;\delta]$.



Рассмотрим множество $\sigma=\{\tau\in[0;1]\mid f(x(t))=f(x_0) \text{ для } t\in[0;\tau]\}\subset[0;1]$. Мы доказали, что $\delta\in\sigma$, т.е. $\sigma\neq\varnothing$. Если $\tau\in[0;1)$, то найдется $\varepsilon>0$, т.ч. $\tau+\varepsilon\in\sigma$. Действительно, в некотором шаре $B(x(\tau),r)$ значение $f(x)=f(x(\tau))=f(x_0)$. В силу непрерывности $t\mapsto x(t)$ найдётся $\varepsilon>0$, т.ч. $x(t)\in B(x(\tau),r)$ для $\tau\le t\le\tau+\varepsilon$, но тогда $f(x(t))=f(x(\tau))=f(x_0)$ для всех $0\le t\le\tau+\varepsilon$. Тогда $\sup\sigma=1$, а значит, $f(x(1))=f(x_0)$ в силу непрерывности $f(x(t))$.

(10.2) Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 10.2: Пусть $f: U(x) \to \mathbb{R}$ — функция, где $U(x)$ — окрестность точки $x=(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда, если в каждой точке $U(x)$ существуют $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$, и они непрерывны в т. x, то функция f дифференцируема в т. x.

Доказательство: Без ограничения общности можно считать, что $U(x)$ — это открытый шар с центром в т. x. Тогда, если $x+h=(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) \in U(x)$, то в $U(x)$ лежат не только точки $(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m), \dots, (x^1, x^2, \dots, x^{m-1}, x^m+h^m)$, но и соединяющие их отрезки.

Так как в $U(x)$ существуют частные производные функции f, то при помощи теорем Лагранжа по каждой переменной получим

$$f(x+h)-f(x)=f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m)-f(x^1, \dots, x^m)=$$
$$=f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m)-f(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m)+$$
$$f(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m)-f(x^1, x^2, x^3+h^3, \dots, x^m+h^m)+$$
$$\dots+f(x^1, x^2, \dots, x^{m-1}, x^m+h^m)-f(x^1, \dots, x^m)=$$
$$=\partial_1 f(x^1+\theta^1 h^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m)h^1+\partial_2 f(x^1, x^2+\theta^2 h^2, x^3+h^3, \dots, x^m+h^m)h^2+$$
$$\dots+\partial_m f(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m+\theta^m h^m)h^m.$$

В силу того, что $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ непрерывны в т. x, то

$$f(x+h)-f(x)=\partial_1 f(x)h^1+\alpha^1 h^1+\dots+\partial_m f(x)h^m+\alpha^m h^m,$$

где $\alpha^j(x;h) \to 0$ при $h \to 0$, $j=1, \dots, m$. Таким образом,

$$f(x+h)-f(x)=\partial_1 f(x)h^1+\dots+\partial_m f(x)h^m+o(h) \text{ при } h \to 0. \blacktriangleleft$$

Если в области $G \subset \mathbb{R}^m$ функция f имеет непрерывные частные производные, то мы будем писать $f \in C^{(1)}(G;\mathbb{R})$ или $f \in C^{(1)}(G)$

(10.3) Частные производные высшего порядка

Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ область, функция $f: G \to \mathbb{R}$ имеет в G частную производную $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Тогда эта частная производная является функцией $\partial_i: G \to \mathbb{R}$, её частную производную по переменной x^j мы будем называть **второй частной производной** от f по переменным x^i, x^j.

$$\partial_{ji} f(x) := \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x) := \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(x).$$

По индукции производная порядка $k+1$ задаётся

$$\partial_{i i_1 \dots i_k} f(x) := \partial_i(\partial_{i_1 \dots i_k})f(x).$$

Теорема 10.3. Пусть функция $f: G \to \mathbb{R}$ имеет в области G частные производные
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x).$$
Тогда, если в точке $x \in G$ эти производные непрерывны, то
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x).$$

Доказательство: Для сокращения записи будем считать, что f является функцией двух переменных $f(x^1, x^2)$.

Пусть в точке $x = (x^1, x^2) \in G$ частные производные $\partial_{12} f: G \to \mathbb{R}$ и $\partial_{21}: G \to \mathbb{R}$ непрерывны. Вместе с точкой x в G лежит некоторый шар $B(x, r)$, т.е. выпуклая окрестность точки x.

Рассмотрим вспомогательную функцию
$$F(h^1, h^2) = f(x^1 + h^1, x^2 + h^2) - f(x^1 + h^1, x^2) - f(x^1, x^2 + h^2) + f(x^1, x^2),$$
где $h \in T_x G$, т.ч. $x + h \in B(x, r)$.

Если ввести $\varphi(t) = f(x^1 + th^1, x^2 + h^2) - f(x^1 + th^1, x^2)$, то
$$F(h^1, h^2) = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Применяя теорему Лагранжа дважды, получим
$$F(h^1, h^2) = \varphi'(\theta_1) = (\partial_1 f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + h^2) - \partial_1 f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2)) h^1 =$$
$$= \partial_{21} f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + \theta_2 h^2) h^2 h^1, \quad \text{где} \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.$$

Аналогично, если ввести $\tilde{\varphi}(t) = f(x^1 + h^1, x^2 + th^2) - f(x^1, x^2 + th^2)$, то
$$F(h^1, h^2) = \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0), \quad \text{и}$$
$$F(h^1, h^2) = \partial_{12} f(x^1 + \tilde{\theta}_1 h^1, x^2 + \tilde{\theta}_2 h^2) h^1 h^2, \quad \text{где} \quad 0 < \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 < 1.$$

Тем самым, мы приходим к равенству
$$\partial_{21} f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + \theta_2 h^2) = \partial_{12} f(x^1 + \tilde{\theta}_1 h^1, x^2 + \tilde{\theta}_2 h^2),$$
из которого в силу непрерывности частных производных $\partial_{12} f, \partial_{21} f$ в точке (x^1, x^2) вытекает
$$\partial_{21} f(x^1, x^2) = \partial_{12} f(x^1, x^2). \qquad \blacktriangleleft$$

Если в области $G \subset \mathbb{R}^m$ функция f имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно, то мы будем писать $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$ или $f \in C^{(k)}(G)$.

Следствие: Если $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, то значение $\partial_{i_1 \ldots i_k} f(x)$ частной производной не зависит от порядка $i_1, \ldots, i_k$ дифференцирования.

Пример 10.1: Пусть $f(x) = f(x^1; x^2) \in C^k(G; \mathbb{R})$, отрезок $[x; x+h] \subset G$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x + th)$ класса $C^{(k)}[0;1]$. Для неё

$$\varphi'(t) = \partial_1 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2) h^1 + \partial_2 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2) h^2$$

$$\varphi''(t) = \partial_{11} f(x+th)(h^1)^2 + \partial_{21} f(x+th) h^2 h^1 + \partial_{12} f(x+th) h^1 h^2 + \partial_{22} f(x+th)(h^2)^2 =$$
$$= \partial_{11} f(x+th)(h^1)^2 + 2\partial_{12} f(x+th) h^1 h^2 + \partial_{22} f(x+th)(h^2)^2.$$

С помощью оператора $(h^1\partial_1 + h^2\partial_2)$ мы можем записать

$$\varphi'(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2) f(x+th) = h^i \partial_i f(x+th),$$

$$\varphi''(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^2 f(x+th) = h^{i_1} h^{i_2} \partial_{i_1 i_2} f(x+th).$$

Откуда по индукции

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^k f(x+th) = h^{i_1} \ldots h^{i_k} \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x+th),$$

где суммирование по всевозможным наборам $i_1, \ldots, i_k$ из k индексов, принимающих значения 1 или 2.

Для $f(x) = f(x^1, \ldots, x^m) \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, где $G \subset \mathbb{R}^m$, для $\varphi(t) = f(x + th)$ справедлива аналогичная формула

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^k f(x+th) = h^{i_1} \ldots h^{i_k} \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x+th), \tag{10.1}$$

где суммирование по всевозможным наборам $i_1, \ldots, i_k$ из k индексов, принимающих значения от 1 до m.

10.4 Формула Тейлора

Теорема 10.4. Пусть $f : U(x) \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$, где $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность точки $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда, если $x + h \in U(x)$, то

$$f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h),$$

где $$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x+th)\, dt.$$

Доказательство: Применив к функции одной переменной $\varphi(t) = f(x+th)$, которая принадлежит классу $C^{(n)}[0;1]$, получим

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)\tau + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\tau^{n-1} + \int_0^\tau \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(t\tau)\, dt$$

для $\tau \in [0;1]$. Откуда при $\tau = 1$, получим

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(t)\, dt.$$

С учётом (10.1) получаем утверждение теоремы ◀

Остаток в форме Лагранжа

$$r_{n-1}(x;h) = \frac{1}{n!}\left(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m\right)^n f(x+\theta h), \text{ где } 0<\theta<1.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m\right)^k f(x) + o(\|h\|^n) \text{ при } h\to 0.$$