

Лекция 10: Основные теоремы дифференциального исчисления

10.1 Теорема о среднем

Теорема 10.1: Пусть $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, определённая в области $G \subset \mathbb{R}^n$, отрезок $[x; x+h] \subset G$. Тогда, если $f \in C([x; x+h])$ и дифференцируема в каждой из точек $(x; x+h)$, то существует $\xi \in (x; x+h)$, т.е.

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi)h \text{ или } f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^m f'_i(\xi) h^i.$$

Доказательство: Введём вспомогательную функцию $F(t) = f(x+th)$, определённую на отрезке $[0; 1] \subset \mathbb{R}$. Заметим, что $F \in C[0; 1]$ и F дифференцируема во внутренних точках отрезка $[0; 1]$. Поэтому по теореме Лагранжа существует $\theta \in (0; 1)$ такая, что

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \text{ где } x+\theta h \in (x; x+h). \triangleleft$$

Следствие: Пусть $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а её дифференциал равен нулю в любой точке $x \in G$. Тогда f постоянна в G .

Доказательство: В начале докажем, что утверждение верно для функции, определённой в некотором шаре $B(x, r)$.

Из равенства нулю дифференциала в любой точке $B(x, r)$ следует, что

$$\partial_1 f(p) = \dots = \partial_m f(p) = 0 \text{ в любой } p \in B(x, r).$$

Тогда, если $y \in B(x, r)$, то и весь отрезок $[x; y] \subset B(x, r)$, то по теореме $f(y) - f(x) = f'(\xi)h = 0 \cdot h = 0$,

т.е. значения f в любой точке шара совпадают со значениями в его центре x .

Пусть теперь точки $x_0, x_1 \in G$. В силу того, что G - область, найдётся путь $t \rightarrow x(t) \in G$, т.е. $x(0) = x_0, x(1) = x_1$.

Так как G открыто, то существует шар $B(x_0; r) \subset G$. В силу непрерывности отображения $x(t)$ найдётся $\delta > 0$, т.е. $x(t) \in B(x_0, r)$ для всех $0 \leq t \leq \delta$, а значит по доказанному $f(x(t)) \equiv f(x_0)$ на $[0; \delta]$.



Рассмотрим множество $\sigma = \{ \tau \in [0; 1] \mid f(x(t)) = f(x_0) \text{ для } t \in [0; \tau] \} \subset [0; 1]$. Мы докажем, что $\delta \in \sigma$, т.е. $\sigma \neq \emptyset$. Если $\tau \in [0; 1]$, то найдётся $\varepsilon > 0$, т.е. $\tau + \varepsilon \in \sigma$. Действительно, в некотором шаре $B(x(\tau), r)$ значение $f(x) = f(x(\tau)) = f(x_0)$. В силу непрерывности $t \rightarrow x(t)$ найдётся $\varepsilon > 0$, т.е. $x(t) \in B(x(\tau), r)$ для $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$, но тогда $f(x(t)) = f(x(\tau)) = f(x_0)$ для всех $0 \leq t \leq \tau + \varepsilon$. Тогда $\sup \sigma = 1$, а значит, $f(x(1)) = f(x_0)$ в силу непрерывности $f(x(t))$.

10.2 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 10.2: Пусть $f: U(x) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, где $U(x)$ — окрестность точки $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда, если в каждой точке $U(x)$ существуют $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$, и они непрерывны в т. х., то функция f дифференцируема в т. х.

Доказательство: Без ограничения общности можно считать, что $U(x)$ — это открытый шар с центром в т. х. Тогда, если $x+h = (x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) \in U(x)$, то в $U(x)$ лежат не только точки $(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m), \dots, (x^1+h^1, \dots, x^{m-1}, x^m+h^m)$, но и соединяющие их отрезки.

Так как в $U(x)$ существуют частные производные функции f , то при помощи теоремы Лагранжа по каждой переменной получим

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \\ &= f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) - f(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m) + \\ &\quad f(x^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m) - f(x^1, x^2, x^3+h^3, \dots, x^m+h^m) + \\ &\quad \dots + f(x^1, x^2, \dots, x^{m-1}, x^m+h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \\ &= \partial_1 f(x^1 + \theta^1 h^1, x^2+h^2, \dots, x^m+h^m) h^1 + \partial_2 f(x^1, x^2 + \theta^2 h^2, x^3+h^3, \dots, x^m+h^m) h^2 + \\ &\quad \dots + \partial_m f(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m + \theta^m h^m) h^m. \end{aligned}$$

В силу того, что $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ непрерывны в т. х., то

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(x) h^1 + \partial_2 f(x) h^2 + \dots + \partial_m f(x) h^m + o(h^m),$$

где $o^j(x; h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $j=1, \dots, m$. Таким образом,

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(x) h^1 + \dots + \partial_m f(x) h^m + o(h) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad \blacktriangleleft$$

Если в области $G \subset \mathbb{R}^m$ функция f имеет непрерывные частные производные, то мы можем писать $f \in C^1(G; \mathbb{R})$ или $f \in C^{(1)}(G)$.

10.3 Частные производные высшего порядка

Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ область, функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в G частную производную $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Тогда эта частная производная является функцией $\partial_i: G \rightarrow \mathbb{R}$, её частную производную по переменной x^i мы будем называть **второй частной производной** от f по переменным x^i, x^i :

$$\partial_{ii} f(x) := \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}(x) := \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)(x).$$

По индукции производная порядка $k+1$ задается

$$\partial_{i_1 i_2 \dots i_k} f(x) := \partial_{i_1} (\partial_{i_2 \dots i_k} f)(x).$$