# Лекция 11: Экстремумы функций нескольких переменных

## 11.1 Локальные экстремумы

**Определение 11.1:** Пусть функция $f: E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, точка $x_0$ — внутренняя для множества $E$. Говорят, что функция $f$ имеет в точке $x_0$ **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует $U(x_0) \subset E$, т.ч. $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) для всех $x \in U(x_0)$.

Если в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ указанные неравенства строгие, то говорят о **строгом локальном максимуме** (**минимуме**).

**Локальные экстремумы** — это локальные минимумы и максимумы функции.

**Теорема 11.1:** Пусть функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ частные производные по каждой переменной $x^1, \dots, x^m$. Тогда, если в точке $x_0$ функция $f$ имеет локальный экстремум, то

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0.$$

**Доказательство:** Рассмотрим функцию $\varphi(x^j) := f(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, x^j, x_0^{j+1}, \dots, x_0^m)$, зависящую от одного переменного и определенную в некоторой окрестности $x_0^j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$.

Если в т. $x_0$ функция $f$ имеет локальный экстремум, то функция $\varphi$ имеет локальный экстремум в т. $x_0^j$. Поэтому, т.к $\varphi$ дифференцируема в точке $x_0^j$, имеется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \varphi'(x_0^j) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \blacktriangleleft$$

**Пример 11.1:** Функция $f(x^1, \dots, x^m) = (x^1)^3$ имеет в т. $x_0 = (0, \dots, 0)$ нулевые частные производные, однако в этой точке нет экстремума. Поэтому теорема 11.1 даёт лишь необходимое условие локального экстремума. $\blacktriangleleft$

**Определение 11.2:** Точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ называется **стационарной** (**критической**) точкой функции $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, дифференцируемой в точке $x_0$, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0. \qquad (11.1)$$

**Теорема 11.2:** Пусть $f \in C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, и точка $x_0$ — критическая для функции $f$. Если в разложении Тейлора

$$f(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m) = f(x_0^1, \dots, x_0^m) + \frac{1}{2!} \overbrace{\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j}^{\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j} + o(\|h\|^2)$$

функции $f$ в точке $x_0$ квадратичная форма $\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j$

1) знакоопределена, то $f$ имеет в т. $x_0$ локальный экстремум. При этом, если эта форма положительно определена, то в т. $x_0$ строгий локальный минимум, если форма отрицательно определена, то в т. $x_0$ строгий локальный максимум.

2) принимает значения разных знаков, то в т. $x_0$ функция экстремума не имеет

Доказательство: Для $x_0+h \in \mathcal{U}(x_0)$ представим приращение функции в виде

(*) $$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|} + o(1)\right\}$$

при $h \to 0$.

Заметим, что вектор $e = \left(\frac{h^1}{\|h\|}, \dots, \frac{h^m}{\|h\|}\right) \in S(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$. Сфера является компактом в $\mathbb{R}^m$, поэтому ограничение квадратичной формы $\partial_{ij}f(x_0)h^ih^j$ на сферу $S(0;1)$ достигает на сфере наибольшее значение $M$ и наименьшее значение $m$ в точках $e_M, e_m \in S(0,1)$, соответственно.

Если форма $\partial_{ij}f(x_0)h^ih^j$ положительно определена, то $0<m\leq M$. Поэтому существует $\delta>0$, т.ч. для $\|h\|<\delta$ бесконечно малая функция из (*) удовлетворяет неравенству $|o(1)|<m$. Тогда при $\|h\|<\delta$ скобка в выражении (*) является положительной, а, следовательно, приращение $f(x_0+h)-f(x_0)>0$ при $0<\|h\|<\delta$. В этом случае в точке $x_0$ функция $f$ имеет точку строгого локального минимума.

Случай отрицательной определенности рассматривается аналогично. Тем самым п. 1) доказан.

Докажем п. 2). В этом случае $m<0<M$. Пусть вектор $h = te_m$, т.ч. $x_0+te_m \in \mathcal{U}(x_0)$, тогда

$$f(x_0+te_m)-f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(m+o(1)) \quad \text{при } t\to 0.$$

Очевидно, что при достаточно малых $t$ величина $m+o(1)$ будет отрицательной, поэтому и приращение функции $f$ будет отрицательным.

Для вектора $h = te_M$ приращение

$$f(x_0+te_M)-f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(M+o(1))$$

будет положительным при достаточно малых $t$.

Следовательно, в любой окрестности т. $x_0$ найдутся как точки, в которых значение $f(x)$ больше $f(x_0)$, так и точки, в которых $f(x)$ меньше $f(x_0)$. Поэтому в т. $x_0$ нет локального экстремума.

Пример 11.2: Рассмотрим функцию $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2$.

Её критические точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3-4x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Функция $f$ имеет три критические точки: $(0,0)$, $(-1,0)$ и $(1,0)$.

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2-4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2,$$

а значит квадратичные формы $\partial_{ij}f(x_0)h^ih^j$ в критических точках имеют вид $-4(h^1)^2$, $8(h^1)^2$, $8(h^1)^2$, т.е. являются полуопределёнными. Следовательно, теорема 11.2 не применима.

Из разложения $f(x,y) = (x^2-1)^2+y^4-1$ видно, что в т. $(-1,0)$ и $(1,0)$ функция $f$ имеет строгий минимум. В т. $(0,0)$ же экстремума нет

На практике знакоопределённость квадратичной формы удобно проверять с помощью критерия Сильвестра, который гласит, что квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x^i x^j$, заданная симметрической матрицей,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

1) положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы положительны, т.е.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

2) отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных миноров матрицы чередуются, начиная с $a_{11} < 0$.