Лекция 11: Экстремумы функций нескольких переменных

11.1 Локальные экстремумы

Определение 11.1: Пусть функция $f: E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, точка x_0 – внутренняя для множества E. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует $U(x_0) \subset E$, т.ч. $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) для всех $x \in U(x_0)$.

Если в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ указанные неравенства строгие, то говорят о **строгом локальном максимуме** (**минимуме**).

Локальные экстремумы — это локальные минимумы и максимумы функции.

Теорема 11.1: Пусть функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x_0 = (x_0^1, \dots, x_m^1)$ частные производные по каждой переменной $x^1, \dots, x^m$. Тогда, если в точке x_0 функция f имеет локальный экстремум, то

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0.$$

Доказательство: Рассмотрим функцию $\varphi(x^j) := f(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, x^j, x_0^{j+1}, \dots, x_0^m)$, зависящую от одного переменного и определенную в некоторой окрестности $x_0^j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$.

Если в т. x_0 функция f имеет локальный экстремум, то функция φ имеет локальный экстремум в т. x_0^j. Поэтому, т.к. φ дифференцируема в точке x_0^j, имеется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \varphi'(x_0^j) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

◀

Пример 11.1: Функция $f(x^1, \dots, x^m) = (x^1)^3$ имеет в т. $x_0 = (0, \dots, 0)$ нулевые частные производные, однако в этой точке нет экстремума. Поэтому теорема 11.1 даёт лишь необходимое условие локального экстремума.

◀

Определение 11.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ называется **стационарной** (**критической**) точкой функции $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, дифференцируемой в точке x_0, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0. \qquad (11.1)$$

Теорема 11.2: Пусть $f \in C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, и точка x_0 – критическая для функции f. Если в разложении Тейлора

$$f(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m) = f(x_0^1, \dots, x_0^m) + \frac{1}{2!} \overbrace{\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j}^{\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j} + o(\|h\|^2)$$

функции f в точке x_0 квадратичная форма $\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j$

1) знакоопределена, то f имеет в т. x_0 локальный экстремум. При этом, если эта форма положительно определена, то в т. x_0 строгий локальный минимум, если форма отрицательно определена, то в т. x_0 строгий локальный максимум.
2) принимает значения разных знаков, то в т. x_0 функция экстремума не имеет