Лекция 12

(12.1) Теорема о неявной функции

Рассмотрим систему уравнений

$$(12.1)\qquad \begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^m;\ y^1,\dots,y^n)=0,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ F^n(x^1,\dots,x^m,\ y^1,\dots,y^n)=0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad F(x,y)=0.$$

интересует вопрос о локальной разрешимости этой системы, т.е. в окрестности некоторой точки $(x_0,y_0)=(x_0^1,\dots,x_0^m;\ y_0^1,\dots,y_0^n)\in\mathbb{R}^{m+n}$, т.ч. $F(x_0,y_0)=0$, в виде функциональной зависимости

$$(12.2)\qquad \begin{cases} y^1=f^1(x^1,\dots,x^m),\\ \dots\quad\dots\quad\dots\\ y^n=f^n(x^1,\dots,x^m), \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad y=f(x).$$

Введём следующие обозначения

$$f'(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x),\quad F_x'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x,y),\quad F_y'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(x,y)$$

Теперь мы можем сформулировать результат, решающий сформулированный вопрос.

Теорема 12.1 (о неявной функции)

Пусть отображение $F:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, где $\mathcal{U}$ – окрестность точки (x_0,y_0), удовлетворяет условиям

1. $F\in C^{(p)}(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$, $p\geq 1$.
2. $F(x_0,y_0)=0$.
3. $F_y'(x_0,y_0)$ – обратимая матрица (т.е. $\det F_y'(x_0,y_0)\neq 0$).

Тогда существует $(m+n)$-мерный промежуток $I=I_x^m\times I_y^n$, где

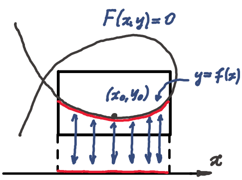
$$I_x^m=\{x\in\mathbb{R}^m:\ |x^i-x_0^i|<\alpha^i,\ i=\overline{1,m}\},\quad I_y^n=\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y^i-y_0^i|<\beta^i,\ i=\overline{1,n}\},$$

и существует отображение $f\in C^{(p)}(I_x^m;I_y^n)$ такое, что для точек $(x,y)\in I$ выполняется

$$F(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ y=f(x),$$

при этом

$$(12.3)\qquad f'(x)=-\left[F_y'(x,f(x))\right]^{-1}\left[F_x'(x,f(x))\right].$$



Замечание: В случае, когда $F(x,y) = F(x^1,\dots,x^m,y)$ — функция, то (12.3) даёт правило дифференцирования неявно заданной функции $y=f(x^1,\dots,x^m)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = -\frac{F'_{x^j}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}, \quad j=\overline{1,m}.$$

12.2 Теорема об обратной функции

Определение 12.1: Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. Тогда отображение $f: U \to V$ называется **диффеоморфизмом гладкости p** ($C^{(p)}$**-диффеоморфизмом**; $p=0,1,2,\dots$), если выполняются условия

1. $f \in C^{(p)}(U; V)$;
2. f — биекция;
3. $f^{-1} \in C^{(p)}(V; U)$.

При $p=0$ говорят о **гомеоморфизмах**.

Теорема 12.2: (об обратной функции)
Пусть $f: G \to \mathbb{R}^m$ — отображение области $G \subset \mathbb{R}^m$, т.ч.

1. $f \in C^{(p)}(G, \mathbb{R}^m)$, $p \geq 1$.
2. $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in G$.
3. $f'(x_0)$ обратимо (т.е. $\det f'(x_0) \neq 0$)

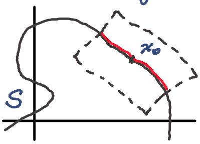
Тогда существуют окрестности $U(x_0) \subset G$ и $V(y_0)$, т.ч. $f: U(x_0) \to V(x_0)$ есть диффеоморфизм гладкости p. При этом для $x \in U(x_0)$ и $y = f(x)$ имеем $$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}.$$

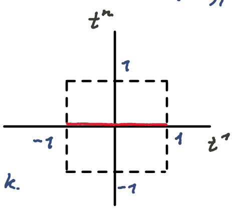
Пример 12.1: 1) Пусть у нас имеется система из $(n-k)$-гладких функций

$$(12.4)\quad \begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^k, x^{k+1},\dots,x^n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^k, x^{k+1},\dots,x^n) = 0, \end{cases}$$

т.ч. в любой точке x_0, принадлежащей множеству S всех решений системы (12.4), выполняется условие

$$(12.5)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0.$$





В этом случае говорят, что система (12.4) имеет ранг $n-k$.

Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное

$$t^1 = x^1, \dots, t^k = x^k, \; t^{k+1} = F^1(x^1,\dots,x^n), \dots, t^n = F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)$$

В силу условия (12.5) в окрестности каждой т. $x_0 \in S$ является диффеоморфизмом той же гладкости, что и функции F^i. Таким образом, в окрестности т. $x_0 \in S$ можно ввести координаты $t^1,\dots,t^n$, в которых S задаётся уравнениями $t^{k+1}=0,\dots,t^n=0$ k-мерной плоскости.

2) Рассмотрим отображение $f: G \to \mathbb{R}^n$ области $G \subset \mathbb{R}^k$, заданное системой

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t^1, \dots, t^k), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x^n = f^n(t^1, \dots, t^k), \end{cases}$$

имеющей в точке $t_0 \in G$ ранг k. Тогда по теореме об обратной функции в некоторой окрестности $U(t_0) \subset G$ можно выразить $t^1, \dots, t^k$ через $x^1, \dots, x^k$, а образ $f(U(t_0))$ может быть переписан в виде

$$x^{k+1} = \varphi^{k+1}(x^1, \dots, x^k), \dots, x^n = \varphi^n(x^1, \dots, x^k) \quad \text{или}$$

$$F^i(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0, \quad \text{где } F^i(x) = x^{k+i} - \varphi^{k+i}(x^1, \dots, x^k), \ i = 1, \dots, n-k.$$

Согласно первой части примера 12.1 образ $f(U(t_0))$ локально является k-мерной плоскостью. ◀

12.3 Поверхности в $\mathbb{R}^n$

Определение 12.2: Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ является **k-мерной гладкой поверхностью** в $\mathbb{R}^n$, если для любой т. $x_0 \in S$ существует окрестность $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi: U(x_0) \to I^n$, где $I^n = \{ t \in \mathbb{R}^n : |t^i| < 1, \ i = 1, \dots, n \}$, т.ч. образ $\varphi(S \cap U(x_0))$ совпадает с частью k-мерной плоскости

$$t^{k+1} = \dots = t^n = 0,$$

лежащей в I^n.

(примеры гладких поверхностей указаны в примере 12.1)

Если k-мерная гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ в окрестности т. $x_0 \in S$ задана параметрически гладким отображением $(t^1, \dots, t^k) \mapsto x = (x^1, \dots, x^n)$ (как в п.2 примера 12.1), где $x_0 = x(0)$ и $x'(0)$ имеет ранг k, то k-мерная плоскость, заданная равенством

$$(12.6) \qquad x - x_0 = x'(0)\, t \iff \begin{cases} x^1 - x_0^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}(0)\, t^1 + \dots + \dfrac{\partial x^1}{\partial t^k}(0)\, t^k, \\ \dots \\ x^n - x_0^n = \dfrac{\partial x^n}{\partial t^1}(0)\, t^1 + \dots + \dfrac{\partial x^n}{\partial t^k}(0)\, t^k, \end{cases}$$

называется **касательной плоскостью** или **касательным пространством** $T_{x_0}S$ к поверхности S в точке $x_0 \in S$.

Для поверхности S, заданной системой соотношений (12.4), уравнение $T_{x_0}S$ имеет вид

$$(12.7) \qquad F'_x(x_0)(x - x_0) = 0.$$

12.4 Условный экстремум

Теперь нас будет интересовать вопрос об отыскании экстремума функции

$$y = f(x^1, \dots, x^n)$$

при условии, что переменные удовлетворяют системе уравнений

$$F^j(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если все функции F^j гладкие, и ранг этой системы равен $n-k$, то она задаёт k-мерную гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому задача на условный экстремум состоит в отыскании экстремума ограничения $f|_S$ функции f на поверхность S.

Пусть в окрестности т. $x_0 \in S$ поверхность S задаётся параметрически: $(t^1, \dots, t^k) \mapsto x = (x^1, \dots, x^n)$, где $x_0 = x(0)$.
Тогда в этой окрестности $f|_S(t^1, \dots, t^k) = f(x^1(t^1, \dots, t^k), \dots, x^n(t^1, \dots, t^k))$.
Если точка 0 является экстремальной для $f|_S$, то её частные производные в этой точке равны нулю:

$$(f|_S)'_{t^j}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \cdot \frac{\partial x^1}{\partial t^j}(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \frac{\partial x^n}{\partial t^j}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Это означает, что векторы $\frac{\partial x}{\partial t^j}(0) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial t^j}(0), \dots, \frac{\partial x^n}{\partial t^j}(0)\right) \in T_{x_0}S$, $j = 1, \dots, k$, удовлетворяют соотношению

$$f'(x_0)\, \xi = 0, \quad \text{где } f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right),$$

задающему касательное пространство $T_{x_0}N$ к поверхности уровня

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\},$$

проходящей через точку x_0.

Поскольку всякий вектор $\xi \in T_{x_0}S$ является линейной комбинацией векторов $\frac{\partial x}{\partial t^j}(0)$, $j = 1, \dots, k$, то для $\xi \in T_{x_0}S$

$$f'(x_0)\, \xi = f'(x_0) \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{\partial x}{\partial t^j}(0) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(f'(x_0) \frac{\partial x}{\partial t^j}(0)\right) = 0.$$

Теорема 12.3 (необходимое условие условного экстремума)
Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f: D \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^{(1)}(D; \mathbb{R})$. Пусть $S \subset D$ – гладкая поверхность. Тогда, если т. $x_0 \in S$, некритическая для функции f, является точкой экстремума функции $f|_S$, то

$$T_{x_0}S \subset T_{x_0}N. \tag{12.8}$$

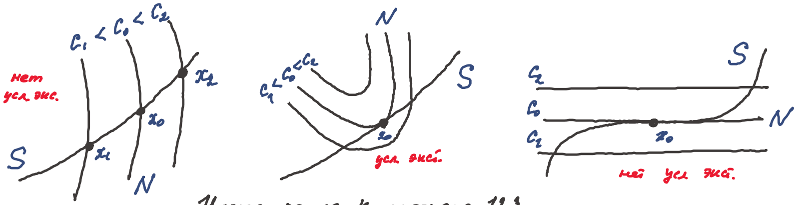


Иллюстрация к теореме 12.3

Рассмотрим так называемую функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Точка (x_0, λ^0) является стационарной для $L(x,\lambda)$ тогда и только тогда, когда

(12.9) $\quad \operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \operatorname{grad} F^i(x_0)$ и $F^i(x_0) = 0,\ i = 1,\dots,m.$

Эти соотношения эквивалентны геометрическому условию (12.8).

Теорема 12.4 (достаточный признак условного экстремума)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f: D \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^{(2)}(D;\mathbb{R})$.
Пусть $S \subset D$ – гладкая поверхность, заданная системой

$$F^i(x) = 0, \quad i = 1,\dots,m,$$

где $F^i \in C^{(2)}(D;\mathbb{R})$ и ранг системы равен m в любой точке D.

Пусть в функции Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x^1,\dots,x^n)$$

множители Лагранжа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ выбраны в соответствии с условием (12.9) экстремума функции $f|_S$ в т. x_0.

Тогда для того, чтобы т. x_0 была точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\,\xi^i \xi^j$$

была знакоопределена для $\xi \in T_{x_0}S$. Если форма положительно определена на $T_{x_0}S$, то т. x_0 – точка строгого локального минимума функции $f|_S$; если она отрицательно определена на $T_{x_0}S$, то т. x_0 – точка строгого локального максимума функции $f|_S$.

Если форма принимает на $T_{x_0}S$ значения разных знаков, то т. x_0 не является точкой экстремума функции $f|_S$.