Лекция 12: Теорема о неявной функции

12.1 Постановка задачи и формулировка

Рассмотрим систему уравнений

$$(12.1)\qquad \begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^m; y^1,\dots,y^n)=0,\\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\\ F^n(x^1,\dots,x^m; y^1,\dots,y^n)=0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad F(x,y)=0.$$

интересует вопрос о локальной разрешимости этой системы, т.е. в окрестности некоторой точки $(x_0,y_0)=(x_0^1,\dots,x_0^m; y_0^1,\dots,y_0^n)\in\mathbb{R}^{m+n}$, т.е. $F(x_0,y_0)=0$, в виде функциональной зависимости

$$(12.2)\qquad \begin{cases} y^1=f^1(x^1,\dots,x^m),\\ \dots\quad \dots\quad \dots\\ y^n=f^n(x^1,\dots,x^m), \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad y=f(x).$$

Введём следующие обозначения

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x),\quad F_x'(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x,y),\quad F_y'(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(x,y)$$

Теперь мы можем сформулировать результат, решающий сформулированный вопрос.

Теорема 12.1 (о неявной функции)

Пусть отображение $F: \mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, где $\mathcal{U}$ — окрестность точки (x_0,y_0), удовлетворяет условиям

1. $F\in C^{(p)}(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$, $p\geq 1$.
2. $F(x_0,y_0)=0$.
3. $F_y'(x_0,y_0)$ — обратимая матрица (т.е. $\det F_y'(x_0,y_0)\neq 0$).

Тогда существует $(m+n)$-мерный промежуток $I=I_x^m\times I_y^n$, где

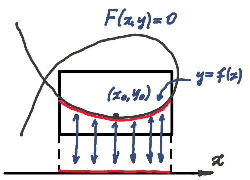
$$I_x^m=\{x\in\mathbb{R}^m:\ |x^i-x_0^i|<\alpha^i,\ i=\overline{1,m}\},\quad I_y^n=\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y^i-y_0^i|<\beta^i,\ i=\overline{1,n}\},$$

и существует отображение $f\in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$ такое, что для точек $(x,y)\in I$ выполняется

$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x),$$

при этом

$$(12.3)\qquad f'(x)=-\left[F_y'(x,f(x))\right]^{-1}\left[F_x'(x,f(x))\right].$$



Замечание: В случае, когда $F(x,y) = F(x^1,\dots,x^m,y)$ – функция, то (12.3) дает правило дифференцирования неявно заданной функции $y = f(x^1,\dots,x^m)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = -\frac{F'_{x^j}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}, \quad j=\overline{1,m}.$$