Лекция 13: Поточечная и равномерная сходимость

13.1 Функциональные последовательности и ряды

Напомним, что последовательностью называется функция натурального аргумента. Если значения этой функции лежат в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то последовательность называется числовой. Рассмотрим ещё один класс последовательностей — последовательности, значения которых сами являются функциями. Мы будем называть их **функциональными**.

Более формально, функциональной последовательностью называется функция двух переменных
$$(n, x) \mapsto F(n, x) =: f_n(x), \quad \text{где } n \in \mathbb{N},\ x \in E \subset \mathbb{R}.$$
Сохраняя классические обозначения, мы будем писать $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Далее мы будем полагать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ имеют непустую общую область определения $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 13.1: Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется **сходящейся (поточечно) на множестве** $E \subset X$, если для некоторой функции $f: E \to \mathbb{R}$ выполняется условие

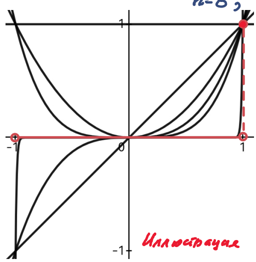
(13.1) $$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ т.ч. } \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Иными словами, для каждой фиксированной точки $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к пределу $f(x)$.

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ на E.

Пример 13.1: Рассмотрим функциональную последовательность $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, здесь $X = \mathbb{R}$. Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$
не является числом во всех остальных случаях.

Таким образом,
$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{на } (-1; 1].$$



Определение 13.2: Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется **сходящейся равномерно на множестве** $E \subset X$, если для некоторой функции $f: E \to \mathbb{R}$ выполняется условие

(13.2) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ т.ч. } \forall n \geq N \text{ и } \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на E.

Пример 13.2: 1) Функциональная последовательность $x^n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $E=[0,q]$, где $0<q<1$.
Действительно,
$$|x^n| = |x|^n \le q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Каждой функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ можно поставить в соответствие новую функциональную последовательность $\{S_n(x)\}$, где
$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x),$$
которую называют последовательностью частичных сумм функционального ряда
$$(13.3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} S(x)$ на E, то функциональный ряд (13.3) называется сходящимся (поточечно) на множестве E к функции $S(x)$ (сумме ряда).
Если к некоторой функции $S(x)$ на E сходится функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$, то ряд (13.3) называется абсолютно сходящимся на E.
Если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на E, то функциональный ряд (13.3) называется сходящимся равномерно на множестве E к функции $S(x)$ (равномерной сумме ряда).

Исследование функционального ряда на поточечную сходимость сводится к исследованию на сходимость числового ряда
$$(13.4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$
коэффициенты которого образуют числовую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Сходимость числового ряда (13.4) понимается как сходимость последовательности $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ его частичных сумм $S_n := a_0 + \dots + a_n$.
Исследование функционального ряда на абсолютную сходимость сводится к исследованию на сходимость числового ряда с неотрицательными коэффициентами.

13.2 Исследование числовых рядов на сходимость

Теорема 13.1 (Необходимое условие сходимости числового ряда)
Если числовой ряд (13.4) сходится, то
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
(Обратное неверно, см. пример 13.3).

Доказательство: Заметим, что для $n \ge 1$ имеется равенство $a_n = S_n - S_{n-1}$. В силу сходимости $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ при $n\to\infty$. Поэтому
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема 13.2 (критерий Коши) Числовой ряд (13.4) сходится $\Longleftrightarrow$
$$(13.5) \qquad \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \text{т.ч.}\ \forall n>m\ge N \text{ выполняется } \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Пример 13.3: 1) Рассмотрим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Для него очевидно выполняется необходимое условие сходимости. Однако

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{для } n \geq 1.$$

Поэтому по критерию Коши гармонический ряд расходится.

2) Рассмотрим ряд из обратных квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots .$$

Для него очевидно выполняется необходимое условие сходимости. Заметим, что для $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Откуда вытекает, что

$$A_n := 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < B_n := 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Последовательность A_n возрастает, т.к. $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. В то же время последовательность B_n сходится, т.к $B_n = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, следовательно, она ограничена, но тогда ограничена и послед-ть A_n. Как мы знаем возрастающие и ограниченные послед-ти сходятся. Следовательно, ряд из обратных квадратов сходится. ◀

Теорема 13.3 (признак сравнения) Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т.ч. $0 \leq a_n \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство: 1) Почти дословно повторяет рассуждения п. 2) примера 13.3
2) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по 1) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Противоречие. ◀

Теорема 13.4 (признак Коши) Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.ч. $a_n \geq 0$, и пусть $\lambda := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

Тогда
1) Если $0 \leq \lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2) Если $\lambda > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
3) Если $\lambda = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство: 1) Если $0 \le \lambda < 1$, то найдётся такое $q \in \mathbb{R}$, что $\lambda < q < 1$. Тогда по определению верхнего предела найдётся $N \in \mathbb{N}$, т.ч. для всех $n > N$ $\sqrt[n]{a_n} < q$, т.е. $a_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, то существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, т.ч. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \lambda$. Если $\lambda > 1$, то существует $K \in \mathbb{N}$, т.ч. для $k > K$ выполняется неравенство $a_{n_k} > 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) См. пример 13.3 1) и 2). $\blacktriangleleft$

Теорема 13.5 (признак Даламбера)

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, т.ч. $a_n > 0$, и пусть

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда

1) Если $0 \le \lambda < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если $\lambda > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) Если $\lambda = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство: 1) Если $\lambda < 1$, то найдётся $q \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda < q < 1$. Тогда по определению предела найдётся $N \in \mathbb{N}$, т.ч. для всех $n \ge N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1}.$$

Откуда получаем, что $a_{n+1} \le a_1 \cdot q^n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ по признаку сравнения следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если $\lambda > 1$, то найдётся $N \in \mathbb{N}$, т.ч. для всех $n \ge N$ выполняется $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_n < a_{n+1}$ для всех $n \ge N$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) См. пример 13.3 1) - 2). $\blacktriangleleft$