Лекция 14.

(14.1) Исследование числовых рядов на сходимость (продолжение)

Теорема 13.5 (признак Даламбера)
Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.ч. $a_n > 0$, и пусть
$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Тогда
1) Если $0 \le \lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2) Если $\lambda > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
3) Если $\lambda = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство: 1) Если $\lambda < 1$, то найдётся $q \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda < q < 1$. Тогда по определению предела найдётся $N \in \mathbb{N}$, т.ч. для всех $n \ge N$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$
Без ограничения общности можно считать, что $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
Заметим, что
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1}.$$
Откуда получаем, что $a_{n+1} \le a_1 \cdot q^n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ по признаку сравнения следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2) Если $\lambda > 1$, то найдётся $N \in \mathbb{N}$, т.ч. для всех $n \ge N$ выполняется $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_n < a_{n+1}$ для всех $n \ge N$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
3) См. пример 13.3 1) - 2).

Теорема 14.1 (интегральный признак сходимости ряда)
Пусть $f: [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ - неотрицательная (т.е. $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [1;+\infty)$), невозрастающая и интегрируемая на любом $[1;\eta] \subset [1;+\infty)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство: Заметим, что оценка $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$ справедлива для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому мы имеем неравенство
$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Можно переписать его в виде $S_{n+1} - f(1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
Тогда, если указанный ряд сходится, то неубывающая функция $\mathcal{F}(\eta) := \int_1^{\eta} f(x)dx$ имеет предел при $\eta \to +\infty$, т.к. она ограничена на $[1;+\infty)$, т.е. интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если ряд расходится, то функция $\mathcal{F}(\eta)$ неограничена, следовательно интеграл расходится.

Аналогично сходимость интеграла влечёт сходимость ряда, а расходимость интеграла влечёт расходимость ряда

Пример 14.1: Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$. Согласно интегральному признаку мы можем исследовать на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},$$

т.к $\frac{1}{x^\alpha} > 0$ на $[1;+\infty)$, убывает на $[1;+\infty)$ и $f \in C[1,\eta]$, на любом подотрезке $[1;\eta] \subset [1;+\infty)$. Известно, что этот интеграл сходится только и только, если $\alpha > 1$. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ сходится} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

14.2 Условно сходящиеся числовые ряды

Определение 14.1: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится условно**, если он сходится, но не абсолютно.

Теорема 14.2: (признак Лейбница)
Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и

$$a_n \geq a_{n+1} > 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда **знакочередующийся ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится. Более того, если S - сумма ряда, то

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Доказательство: Заметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Поэтому т.к. $\{a_n\}$ не возрастает,

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq S_{2n},$$

т.е. $\{S_{2n}\}$ не убывает.

Вместе с тем, мы можем записать

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

где $a_1 > 0$, $(a_2 - a_3) \geq 0, \ldots, (a_{2n-2} - a_{2n-1}) \geq 0$, $a_{2n} > 0$. Откуда $S_{2n} < a_1$.
Таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает и ограничена сверху.
Но тогда она сходится: $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ по условию теоремы, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Следовательно, мы можем заключить, что $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.к. последовательность разбилась на две подпоследовательности, имеющие один и тот же предел.

Поскольку $\{S_{2n}\}$ неубывающая и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, то справедливо неравенство $S_{2n} \le S$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \le S_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. $\{S_{2n-1}\}$ не возрастает. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$, то $S_{2n-1} \ge S$, $n \in \mathbb{N}$.
В итоге для всех $n \in \mathbb{N}$

$$(14.1) \quad S_{2n} \le S \le S_{2n+1}$$

$$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \le S - S_{2n-1}$$

Откуда для всех $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1},$$

$$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \le S - S_{2n-1} \le 0,$$

т.е. $|S - S_n| \le a_{n+1}$.

Пример 14.2: Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то по теореме 14.2 этот ряд сходится. При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а значит исходный ряд сходится условно.
В силу (14.1) сумма ряда S удовлетворяет неравенству

$$1/2 \le S \le 1.$$

Увидим, что к сумме

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

нельзя относится как к конечной сумме. Иначе,

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$S + \frac{1}{2} S = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-1/6 + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = S$$

$$\frac{1}{2} S = 0, \quad \text{т.е. } S = 0,$$

что противоречит оценке $\frac{1}{2} \le S \le 1$.

Теорема 14.3 (Римана)
Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \in \mathbb{R}$, сходится условно. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}$ можно переставить члены этого ряда так, что сумма нового ряда будет равна A.

14.3 Абсолютно сходящиеся числовые ряды

Теорема 14.4: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он и просто сходится.
Доказательство: Очевидным образом вытекает из критерия Коши (теорема 13.2) и неравенства треугольника:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

Из критерия Коши и равенства
$$\sum_{k=n}^{n+p} |c a_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|$$
вытекает, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то для любой $c \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ будет сходится абсолютно. Более того
$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

С помощью оценки
$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k + b_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |b_k|$$
можно доказать, что, если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится абсолютно. Более того,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

Теорема 14.5: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$ — числовой ряд, составленный из тех же членов, что и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, но взятых в другом порядке. Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$ тоже сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Из этой теоремы вытекает, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

Теорема 14.6: Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ сходятся абсолютно, а S' и S'' — сумма первого и второго ряда, соответственно. Тогда ряд составленный из всевозможных попарных произведений $a_n b_m$, расположенных в произвольном порядке, сходится абсолютно. Более того, его сумма S равна произведению $S'S''$

Таким образом, свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм.