Лекция 2: Свойства интеграла Римана

(2.1) Интегралы Дарбу

Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная на $[a;b]$ функция, P — разбиение $[a;b]$.
Пусть $m_i := \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i := \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда суммы

$$s(f;P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad S(f;P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

называются соответственно **нижней** и **верхней суммой Дарбу** функции f, соответствующей разбиению отрезка $[a;b]$.

Для этих сумм справедливо очевидное неравенство

$$(2.1) \qquad s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi) \le S(f;P)$$

где P — произвольное разбиение $[a;b]$, а ξ — набор его отмеч-х точек.

Лемма 2.1: $s(f;P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f;P,\xi)$, $S(f;P) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f;P,\xi)$.

Доказательство: Докажем первое равенство. В силу оценки (2.1) достаточно показать, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\bar{\xi}$, т.ч.

$$\sigma(f,P,\bar{\xi}) - \varepsilon < s(f,P).$$

Так как $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, т.ч.

$$m_i > f(\bar{\xi}_i) - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Положив $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$, получим

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{\xi}_i) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sigma(f;P,\bar{\xi}) - \varepsilon.$$

Второе равенство проверяется аналогично. ◀

Теорема 2.1: Пусть $f \in B[a;b]$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$ когда сущ-т и равны между собой

$$(2.2) \qquad \underline{I} := \lim_{\lambda(P) \to 0} s(f;P), \qquad \overline{I} := \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P).$$

При этом их общее значение равно $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство: ($\Leftarrow$) Пусть пределы в (2.2) сущ-т и равны между собой. Тогда из двойного неравенства (2.1) следует, что

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;P,\xi) = \overline{I},$$

т.е. $f \in R[a;b]$.

($\Rightarrow$) Пусть $f \in R[a,b] \Rightarrow$ существует $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;P,\xi) = I$. Из (2.1) и док-ва леммы 2.1 следует, что $\sigma(f;P,\xi) - \varepsilon < s(f;P) \le \sigma(f;P,\xi)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Откуда $\underline{I} := \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f;P) = I$. Аналогично, $\overline{I} := \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f;P) = I$ ◀

Следствие: Пусть $f \in B[a;b]$. Тогда $f \in R[a;b] \Leftrightarrow$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i = 0.$$

Доказательство: ($\Leftarrow$) Следует из теоремы 1.3.

($\Rightarrow$) Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = S(f;P) - s(f;P) \xrightarrow[\lambda(P)\to 0]{} 0$$

по доказанной теореме ◀

2.2 Векторное пространство $R[a;b]$

Теорема 2.2: Пусть $f, g \in R[a;b]$. Тогда

1) $f+g \in R[a;b]$;
2) $(\alpha f) \in R[a;b]$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $|f| \in R[a;b]$;
4) если $[c;d] \subset [a;b]$, то сужение $f|_{[c;d]}$ функции на $[c;d]$ тоже является элементом $R[a;b]$;
5) $f \cdot g \in R[a;b]$.

Доказательство: 1) Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} (f+g)(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$. Поэтому интегральная сумма для суммы $f+g$ при $\lambda(P)\to 0$ будет стремиться к сумме интегралов функций f и g.

2) Вытекает из равенства $\sum_{i=1}^{n} (\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

3) Из оценки $\omega(|f|;[x_{i-1},x_i]) \le \omega(f;[x_{i-1},x_i])$, $i=\overline{1,n}$, и достаточного условия интегрируемости (теорема 1.3) вытекает, что интегрируемость f по $[a;b]$ влечёт интегрируемость её модуля.

4) Рассмотрим некоторое разбиение π отрезка $[c;d]$. Его очевидно можно дополнить некоторыми точками до разбиения P всего отрезка $[a;b]$ так, что $\lambda(P) \le \lambda(\pi)$.

Тогда из оценки $\sum_{\pi} \omega(f|_{[c;d]};[x_{i-1},x_i])\Delta x_i \le \sum_{P} \omega(f;[x_{i-1};x_i])\Delta x_i$ получаем, что

$$\lim_{\lambda(\pi)\to 0} \sum_{\pi} \omega(f|_{[c;d]};[x_{i-1},x_i])\Delta x_i = 0$$ (это влечёт $f|_{[c;d]} \in R[c;d]$ по следствию теоремы 2.1),

т.к. $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{P} \omega(f;[x_{i-1};x_i])\Delta x_i = 0$ в силу интегрируемости f на $[a;b]$.

5) Покажем, что $f^2 \in R[a;b]$, если $f \in R[a;b]$. Если $f \in R[a;b]$, то $f \in B[a;b]$, т.е. $|f(x)| \le C$ $\forall x \in [a;b]$. Оценка

$$|f^2(x') - f^2(x'')| = |f(x') + f(x'')|\,|f(x') - f(x'')| \le 2C|f(x') - f(x'')|$$

влечёт $\omega(f^2;[x_{i-1};x_i]) \le 2C\,\omega(f;[x_{i-1};x_i])$, а следовательно и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2;[x_{i-1};x_i])\Delta x_i \le 2C \sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1};x_i])\Delta x_i,$$

откуда по следствию теоремы 2.1 следует, $f^2 \in R[a;b]$, если $f \in R[a;b]$.

Замечаем, что $(f\cdot g)(x) = \frac{1}{4}\left(\left((f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\right)\right)$, поэтому из п.1), п.2) и только что доказанного, следует, что $f\cdot g \in R[a;b]$. ◀

Следствие: Пусть $f, g \in R[a;b]$. Тогда для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

(интеграл – линейный функционал на $R[a;b]$)

2.3 Интеграл как аддитивная функция отрезка интегрирования.

Лемма 2.2: Пусть $a<b<c$ и $f\in R[a;c]$. Тогда $f|_{[a;b]} \in R[a;b]$, $f|_{[b;c]} \in R[b;c]$, и имеется равенство

$$(2.3)\quad \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказательство: Из п.4 теоремы 2.1 следует, что $f|_{[a;b]} \in R[a;b]$, $f|_{[b;c]} \in R[b;c]$.
Если $f\in R[a;c]$, то значение предела интегральных сумм для f на $[a;c]$ не зависит от выбора разбиения отрезка $[a;c]$ и выбора набора отмеченных точек ξ. Тогда выберем $P = P' \cup P''$ и $\xi = \xi' \cup \xi''$, где P', P'' – произвольные разбиения отрезков $[a;b]$, $[b;c]$, а ξ', ξ'' – наборы отмеченных точек для разбиений P', P'', соответственно. Очевидно, что, переходя к пределу в

$$\sigma(f;P,\xi) = \sigma(f;P',\xi') + \sigma(f;P'',\xi')$$

по $\lambda(P)\to 0$ (т.к. $\lambda(P')\le\lambda(P)$ и $\lambda(P'')\le\lambda(P)$), получим требуемое равенство. ◀

Можно мотивировать следующее соглашение:

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx \text{ для } a>b \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)dx := 0.$$

Теорема 2.2: Пусть $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$.
Тогда

$$(2.4)\quad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

Доказательство: вытекает из леммы 2.2 с учётом принятых соглашений. ◀

Определение 2.1: Пусть $\alpha,\beta \in [a;b]$ ($a<b$ или $b<a$) каждой упорядоченной паре (α,β) сопоставлено число $I(\alpha,\beta)$, т.ч.

$$I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma).$$

Тогда функция $I(\alpha,\beta)$ называется **аддитивной функцией ориентированного промежутка.**

Если $f\in R[A;B]$, и $a,b,c\in[A;B]$, то $\int_a^b f(x)dx$ является аддитивной функцией промежутка интегрирования в силу (2.4)