## Лекция 3:

### (2.3) Интеграл как аддитивная функция отрезка интегрирования.

Можно мотивировать следующее соглашение:

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx \text{ для } a>b \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)dx := 0.$$

Теорема 2.3: Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$.

Тогда

$$(2.4) \qquad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

Доказательство: вытекает из леммы 2.2 с учётом принятых соглашений. ◀

Определение 2.1: Пусть $\alpha, \beta \in [a;b]$ ($a<b$ или $b<a$) каждой упорядоченной паре $(\alpha, \beta)$ сопоставлено число $I(\alpha,\beta)$, т.ч.

$$I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma).$$

Тогда функция $I(\alpha,\beta)$ называется **аддитивной функцией ориентированного промежутка.**

Если $f \in R[A;B]$, и $a, b, c \in [A;B]$, то $\int_a^b f(x)dx$ является аддитивной функцией промежутка интегрирования в силу (2.4)

### (3.1) Оценка интегралов и теоремы о среднем

Теорема 3.1: Пусть $f \in R[a,b]$, где $a \le b$. Тогда $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$.

Доказательство: Пункт 3 теоремы 2.2 говорит, что $|f| \in R[a,b]$ в условиях следствия. Поэтому оценка интеграла вытекает из неравенства

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

посредством предельного перехода в нём по $\lambda(P) \to 0$. ◀

Теорема 3.2: Пусть $f_1, f_2 \in R[a;b]$, где $a \le b$, и $f_1(x) \le f_2(x)$ для всех $x \in [a;b]$.

Тогда справедливо неравенство

$$(3.1) \qquad \int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство: При $a=b$ неравенство тривиально выполняется. Пусть $a<b$, для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sigma(f_1) = \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(f_2),$$

предельный переход по $\lambda(P) \to 0$ в котором даёт требуемое нер-во ◀

Из теоремы 3.2 непосредственно вытекает.

**Следствие 1:** Пусть $a \le b$, $f \in R[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a;b]$. Тогда

$$(3.2) \qquad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

в частности, для неотрицательной на $[a,b]$ функции $f$ $(f(x) \ge 0)$

$$0 \le \int_a^b f(x)dx.$$

**Следствие 2:** Пусть $f \in R[a;b]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m,M]$ такое, что

$$(3.3) \qquad \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

**Доказательство:** Если $a=b$, то (3.3) тривиально выполняется. В случае, когда $a<b$, положим $\mu = (b-a)^{-1}\int_a^b f(x)dx$. Из неравенства (3.2) получаем оценку $m \le \mu \le M$, т.к. $b-a>0$.

Поскольку обе части в (3.3) меняют знак при перестановке $a$ и $b$, то это равенство справедливо и для случая $b<a$. ◀

**Следствие 3:** Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда существует т. $\xi \in [a;b]$ такая, что

$$(3.4) \qquad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

**Доказательство:** Заметим, что в силу непрерывности справедливо

$$m := \min_{[a;b]} f(x) \le f(x) \le \max_{[a;b]} f(x) =: M.$$

Более того по теореме о промежуточном значении для всякого $\mu \in [m;M]$ найдётся $\xi \in [a,b]$, т.ч. $f(\xi) = \mu$. Поэтому равенство (3.4) вытекает из (3.3) ◀

**Теорема 3.3.** (первая теорема о среднем для интеграла)
Пусть $f, g \in R[a;b]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. Тогда, если функция $g$ неотрицательна (неположительна) на $[a;b]$, то

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx, \quad \text{где } \mu \in [m;M].$$

Более того, если известно, что $f \in C[a;b]$, то существует $\xi \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

**Доказательство:** Достаточно доказать теорему в случае $a<b$ и $g(x) \ge 0$ на $[a;b]$.
Очевидно, что на $[a;b]$ выполняется неравенство

$$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x).$$

В силу теоремы 3.2

$$(3.5) \qquad m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то (3.5) влечёт $\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = 0$, утв-я теор-мы тривиально выпол-ся.

Если $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то положим, что $\mu := \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{-1} \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx$

Поскольку $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то из (3.5) находим, что $m \leq \mu \leq M$.

Заметим, что в силу непрерывности $f$ на $[a;b]$ по теореме о промежуточном значении $\exists\, \xi \in [a;b]$, т.г. $f(\xi) = \mu$, для всякого $\mu$, лежащего между $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

**Теорема 3.4:** (вторая теорема о среднем для интеграла)

Пусть $f, g \in R[a;b]$, $g$ монотонна на $[a;b]$. Тогда найдётся точка $\xi \in [a;b]$, т.г.

$$(3.6) \qquad \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad \text{(формула Бонне)}$$

(Без доказательства).

## 3.2 Интеграл с переменным верхним пределом

**Определение 3.1:** Пусть $f \in R[a;b]$. Тогда определённая на $[a;b]$ функция

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

**Лемма 3.1:** Если $f \in R[a;b]$, то $F \in C[a;b]$.

**Доказательство:** Для всякого $x \in [a;b]$ сужение $f\big|_{[a;x]}$ является интегрируемой на $[a;x]$ функцией. Поэтому интеграл с переменным верхним пределом действительно является функцией, определённой на отрезке $[a;b]$.

Пусть $x, x+h \in [a;b]$. Тогда справедлива оценка

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \overset{\text{аддитивность интеграла}}{=} \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right|$$

Если $h > 0$, то в силу теоремы 3.1 и того, что интегрируемость влечёт ограниченность,

$$\left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right| = \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \leq C\int_x^{x+h} dt = Ch.$$

Если $h < 0$, то $\left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right| = \left|-\int_{x+h}^x |f(t)|\,dt\right| = \int_{x+h}^x |f(t)|\,dt \leq C(-h)$.

Поэтому $|F(x+h) - F(x)| \leq C|h|$ для $x, x+h \in [a,b]$. Это и влечёт непрерывность $F$ в произвольной т. $x \in [a;b]$, а значит и на всём $[a;b]$

**Лемма 3.2:** Пусть $f \in R[a;b]$, функция $f$ непрерывна в т. $x \in [a;b]$. Тогда функция $F$ дифференцируема в т. $x$, при этом
$$F'(x) = f(x).$$

**Доказательство:** Если $f$ непрерывна в т. $x$, то мы можем записать её в виде $f(t) = f(x) + \Delta(t)$, где $\Delta(t) \to 0$ при $t \to x$, $t \in [a;b]$. Функция $\Delta(t)$ является интегрируемой на $[a;b]$, т.к. $\Delta(t) = f(t) - f(x)$, где $f$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, а $f(x)$ постоянная функция.

Пусть $I(h)$ – отрезок с концами $x, x+h \in [a;b]$. Положим $M(h) := \sup\limits_{I(h)} |\Delta(t)|$, очевидно, что $M(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Запишем приращение функции $F$ в точке $x$:
$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} \big(f(x) + \Delta(t)\big)\,dt = \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} \Delta(t)\,dt =$$
$$= f(x)h + \int_x^{x+h} \Delta(t)\,dt.$$

Рассмотрим $\left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \Delta(t)\,dt \right| \leq \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |\Delta(t)|\,dt \right| \leq \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} M(h)\,dt \right| = M(h)$ при $h \neq 0$.

Обозначив $\alpha(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \Delta(t)\,dt$, $h \neq 0$, и $\alpha(0) = 0$, получим
$$F(x+h) - F(x) = f(x)h + \alpha(h)h, \quad \text{где } \alpha(h) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

Это и означает, что функция $F$ дифференцируема в т. $x$.