Лекция 5: Несобственные интегралы

(5.1) Определение, примеры и простейшие свойства

Договоримся через $[a;\omega)$ обозначать бесконечный промежуток $(\omega=+\infty)$ либо конечный промежуток $(\omega\in\mathbb{R}:\ \omega>a)$, т.ч. для всякого конечного подотрезка $[a;b]\subset[a;\omega)$ функция $f\in R[a;b]$. В случае конечного ω подразумевается, что функция f может быть неограниченной в любой окрестности $U(\omega)\subset[a;\omega)$.
Тогда **несобственным интегралом** функции f по промежутку $[a;\omega)$ называется величина

$$(5.1)\qquad \int_a^\omega f(x)\,dx := \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)\,dx,$$

где либо $b\to+\infty$ в случае бесконечного промежутка, либо $b\to\omega-0$ в случае конечного промежутка. Когда предел в (5.1) существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**. В ином случае, он называется **расходящимся**.
Если интеграл (5.1) сходится, то функция f называется **интегрируемой в несобственном смысле** на $[a;\omega)$.

Пример 5.1: Рассмотрим несобственный интеграл (функция $\frac{1}{x^\alpha}$ неограничена на $(0;1)$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} := \lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Непосредственное вычисление первообразной показывает, что предел существует только при $\alpha<1$, т.е. указанный интеграл сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$.
Аналогично, несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$.

Теорема 5.1: Пусть $f,g:[a;\omega)\to\mathbb{R}$, т.ч. $f,g\in R[a;b]$ на любом $[a;b]\subset[a;\omega)$.
Пусть $\int_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int_a^\omega g(x)\,dx$ сходятся. Тогда

1) Если $\omega\in\mathbb{R}$ и $f\in R[a;\omega]$, то значения интеграла $\int_a^\omega f(x)\,dx$, понимаемого в собственном, так и в несобственном смысле совпадают.

2) Для всех $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(5.2)\qquad \int_a^\omega(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^\omega f(x)\,dx + \mu\int_a^\omega g(x)\,dx,$$

т.е. функция $\lambda f+\mu g$ интегрируема в несобственном смысле на $[a;\omega)$

3) Для $c\in[a;\omega)$ справедливо равенство

$$(5.3)\qquad \int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\omega f(x)\,dx.$$

4) Если $\varphi : [\alpha; \gamma) \to [a; \omega)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, т.ч. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(b) \to \omega$ при $b \to \gamma$, то функция $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ интегрируема в несобственном смысле на $[\alpha;\gamma)$, и выполняется

(5.4) $$\int_a^\omega f(x)dx := \int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)dt.$$

Доказательство: 1) Т.к. $f \in R[a;\omega]$, то интеграл с переменным верхним пределом $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ является непрерывной функцией на $[a;\omega)$. Поэтому

$$\int_a^\omega f(x)dx =\cdot F(\omega) = \lim_{b\to\omega} F(b) = \lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x)dx$$

2) Равенство (5.2) получается предельным переходом по $b\to\omega$ в равенстве

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx,$$

справедливом для всех $b \in [a;\omega)$.

3) Равенство (5.3) получается предельным переходом по $b\to\omega$ в равенстве

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

справедливом для всех $b, c \in [a;\omega)$.

4) В силу теоремы 4.4 о замене переменной в определённом интеграле

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Равенство (5.4) получается предельным переходом по $\beta\to\gamma$. ◀

Теорема 5.2: Пусть $f, g \in C^{(1)}[a,\omega)$ и существует $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)g(x)$. Тогда функции $f(x)g'(x)$ и $f'(x)g(x)$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a;\omega)$, в первом случае

(5.5) $$\int_a^\omega f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^\omega - \int_a^\omega f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^\omega = \lim\limits_{x\to\omega} (f(x)g(x) - f(a)g(a))$.

Доказательство: Вытекает из формулы интегрирования по частям для определённого интеграла. ◀

5.2 Исследование несобственных интегралов на сходимость

Теорема 5.3: (критерий Коши) Пусть $f \in R[a;b]$ для всех $[a;b] \subset [a;\omega)$. Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a;\omega)$, т.ч. $\forall b_1, b_2 \in (B;\omega)$ выполняется

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство: Заметим, что $\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx = F(b_2) - F(b_1)$. Поэтому утверждение теоремы – это критерий Коши существования предела функции $F(b)$ при $b\to\omega$. ◀

Теорема 5.4: Пусть $f \in R[a;b]$ для всех $[a;b] \subset [a;\omega)$ и $f(x) \geq 0$ на $[a;\omega)$. Тогда несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x)dx$$

сходится $\Leftrightarrow$ когда функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a;\omega)$.

Доказательство: Так как $f(x) \geq 0$ на $[a;\omega)$, то функция $F(b)$ не убывает на $[a;\omega)$. Поэтому F имеет предел при $b \to \omega$ $\Leftrightarrow$ F ограничена на $[a;\omega)$ ◀

Теорема 5.5: (признак сравнения): Пусть $f, g \in R[a;b]$ для всех $[a;b] \subset [a;\omega)$, т.ч.

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

для всех $x \in [a;\omega)$. Тогда

1) Если $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится.
2) Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится, то $\int_a^\omega g(x)dx$ расходится.

Доказательство: Поскольку для всех $b \in [a;\omega)$ функции $f, g \in R[a;b]$ и $f(x) \leq g(x)$ на $[a;\omega)$, то выполняется неравенство

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b).$$

Если $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $G(b)$ ограничена по теореме 5.4, а значит и функция $F(b)$ ограничена, поэтому по теореме 5.4 сходится $\int_a^\omega f(x)dx$

Пусть теперь $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится. Тогда, если $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то по уже доказанному $\int_a^\omega f(x)dx$ тоже сходится. Противоречие показывает, что $\int_a^\omega g(x)dx$ расходится. ◀

Замечание: Если дополнительно к условиям теоремы 5.5 дано, что существуют $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, т.ч. неравенство

$$(5.6) \qquad c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)$$

выполняется в некоторой окрестности $U(\omega) \subset [a;\omega)$, то интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходятся либо расходятся одновременно.

Очевидно, что (5.6) выполняется, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \omega$.

Определение 5.2: Несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f(x)|dx$.

В силу критерия Коши и неравенства

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right|$$

следует, что из абсолютной сходимости вытекает и просто сходимость.

Поскольку $|f(x)| \geq 0$ на $[a;\omega)$, то для исследования на абсолютную сходимость естественно применять признак сравнения (теорема 5.5).

5.3 Условная сходимость несобственных интегралов

Определение 5.3: Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то он называется *условно сходящимся*

Пример 5.2: Заметим, что в силу неравенства
$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$
на $[\frac{\pi}{2};+\infty)$ и сходимости $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

Рассмотрим несобственный интеграл
$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x^2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$
Он сходится, поскольку $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ сходится.

Докажем, что абсолютной сходимости нет. При $x\in[\frac{\pi}{2};+\infty)$ имеем
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{1-\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{\cos 2x}{x}dx.$$
Заметим, что $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ сходится (можно показать с помощью интегрирования по частям), а интеграл $\int^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. Тогда в силу приведённой оценки расходится и $\int_{\pi/2}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$. Таким образом, интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty}\sin x/x\,dx$ сходится условно

Теорема 5.6: (признак Абеля-Дирихле) Пусть $f,g\in R[a;b]$ для всех $[a;b]\subset[a;\omega)$, а функция g монотонна на $[a;\omega)$. Тогда для сходимости несобственного интеграла
$$\int_a^\omega f(x)g(x)\,dx$$
достаточно выполнения любой из пар условий:

$\left.\begin{array}{ll}\alpha_1) & \int_a^\omega f(x)dx \text{ сходится;}\\ \beta_1) & \text{функция } g\in B[a;\omega).\end{array}\right\}$ первая пара

$\alpha_2)$ $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a;\omega)$,

$\beta_2)$ $g(x)\to 0$ при $x\to\omega$.

Доказательство: По второй теореме о средних для любых $b_1,b_2\in[a,\omega)$
$$\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2}f(x)dx,$$
где ξ лежит между b_1 и b_2. Тогда в силу оценки
$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx\right| \leq |g(b_1)|\left|\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx\right| + |g(b_2)|\left|\int_{\xi}^{b_2}f(x)dx\right|$$
мы можем сделать $|\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx|$ сколь угодно малой за счёт выбора b_1 и b_2 из некоторой окрестности $U(\omega)\subset[a;\omega)$, если выполняется любая из пар условий. Сходимость вытекает из критерия Коши

(5.4) Несобственные интегралы с несколькими особенностями

Рассмотрим промежуток $(\omega_1;\omega_2)$ и функцию $f \in R[a;b]$ для всякого $[a;b] \subset (\omega_1;\omega_2)$, полагая, что ω_1, ω_2 могут быть бесконечностями, либо, что функция f может быть неограниченной у $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае определим

(5.7) $$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx \overset{def}{:=} \int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx,$$ где $c \in (\omega_1;\omega_2)$ – произвольная точка.

Заметим, что выражение (5.7) не зависит от выбора точки c. Действительно, пусть для определенности $\tilde{c} \in (\omega_1;\omega_2)$, т.ч. $\tilde{c} < c$. Тогда

$$\int_{\omega_1}^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^{\omega_2} f(x)dx = \int_{\omega_1}^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x)dx =$$
$$= \int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x)dx.$$

Правые части (5.7) совпадают для разных $c \in (\omega_1;\omega_2)$.

Пример 5.3: 1) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to -1+0} \arcsin x\Big|_a^0 +$$
$$+ \lim_{b\to 1-0} \arcsin x\Big|_0^b = \pi.$$

2) Интеграл Эйлера-Пуассона
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$
является сходящимся.

3) Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ очевидно расходится

4) Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится, когда сходятся оба интеграла
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$$

Заметим, что $\frac{\sin x}{x^\alpha} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x\to+0$, поэтому в силу признака сравнения первый интеграл сходится при $\alpha<2$. Второй интеграл по признаку Абеля - Дирихле сходится при $\alpha>0$. Следовательно, исходный интеграл сходится при $0<\alpha<2$.

Пусть теперь функция f неограничена в окрестности точки ω промежутка $(a;b)$. Тогда

(5.8) $$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{:=} \int_a^{\omega} f(x)dx + \int_{\omega}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл (5.8) существует, если сходятся оба интеграла в правой части.

Пример 5.4: Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{0} + 3x^{1/3}\Big|_{0}^{1} = 6.$$

В тоже время интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} := \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$$

очевидно расходится. ◀

В рассматриваемой ситуации можно определить интеграл в смысле главного значения

$$\text{(5.9)} \qquad \text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta \to +0} \left(\int_a^{\omega-\delta} f(x)\,dx + \int_{\omega+\delta}^{b} f(x)\,dx \right).$$

Аналогично можно определить

$$\text{(5.10)} \qquad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$