Лекция 6:

(6.1) Пространство $\mathbb{R}^m$.

Напомним, что декартовым или прямым произведением множеств A и B называется множество $A\times B$ всех упорядоченных пар (a,b), где $a\in A$ и $b\in B$.

Через $\mathbb{R}^m$ мы будем обозначать произведение $\overbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}^{m\text{ раз}}$, точки $\mathbb{R}^m$ имеют вид $x=(x^1,\ldots,x^m)$, число $x^i\in\mathbb{R}$ называется i-й координатой т. x.

Из курса линейной алгебры известно, что множество $\mathbb{R}^m$ образует векторное пространство относительно операций

$$x+y:=(x^1+y^1,\ldots,x^i+y^i,\ldots,x^m+y^m),\quad \text{где } x,y\in\mathbb{R}^m,$$
$$\lambda x:=(\lambda x^1,\ldots,\lambda x^i,\ldots,\lambda x^m),\quad \text{где } x\in\mathbb{R}^m \text{ и } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Расстояние между точками x и y множества $\mathbb{R}^m$ может быть задано формулой

$$d(x,y):=\sqrt{(x^1-y^1)^2+\ldots+(x^i-y^i)^2+\ldots+(x^m-y^m)},\tag{6.1}$$

при $m=1,2$ или 3 оно совпадает с нашими привычными представлениями о расстоянии.

Утверждение 6.1: Заданная (6.1) функция расстояния $d:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ обладает свойствами:

1) $d(x,y)\geq 0$ для всех $x,y\in\mathbb{R}^m$;
2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
3) $d(x,y)=d(y,x)$ для всех $x,y\in\mathbb{R}^m$;
4) неравенство треугольника
$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$
для всех $x,y,z\in\mathbb{R}^m$

Доказательство: Свойства 1)–3) очевидным образом выполняются.

Доказательство неравенства треугольника опирается на лемму.

Лемма: (неравенство Коши-Буняковского)

Для любых $a,b\in\mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m a^ib^i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^m(a^i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^m(b^i)^2}\tag{6.2}$$

Доказательство леммы: Обозначим $(a,b):=\sum_{i=1}^m a^ib^i$, тогда очевидно, что для всех $a,b,c\in\mathbb{R}^m$ и всех $\lambda\in\mathbb{R}$ выполняются равенства

$$(a,b)=(b,a),\quad (a+b,c)=(a,c)+(b,c)\quad\text{и}\quad(\lambda a,b)=\lambda(a,b).$$

Следовательно

$$(a+\lambda b,a+\lambda b)=(a,a+\lambda b)+(\lambda b,a+\lambda b)=(a+\lambda b,a)+\lambda(a+\lambda b,b)=$$
$$=(a,a)+(\lambda b,a)+\lambda(a,b)+\lambda(\lambda b,b)=\lambda^2(b,b)+2\lambda(a,b)+(a,a)$$

Величина $(a+\lambda b,a+\lambda b)\geq 0$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ в силу её определения.

Поэтому квадратный трехчлен $(b,b)\lambda^2 + 2(a,b)\lambda + (a,a)$ имеет неположительный дискриминант, т.е.

$$D = 4(a,b)^2 - 4(a,a)(b,b) \le 0.$$

Откуда получаем неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^m a^i b^i\right)^2 =: (a,b) \le (a,a)(b,b) := \left(\sum_{i=1}^m (a^i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^m (b^i)^2\right),$$

из которого утверждение леммы тривиально вытекает. ◀

Выведем теперь неравенство треугольника из неравенства Коши-Буняковского. Заметим для этого, что

$$\sum_{i=1}^m (a^i+b^i)^2 = \sum_{i=1}^m a^i(a^i+b^i) + \sum_{i=1}^m b^i(a^i+b^i) \overset{(6.2)}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i+b^i)^2} +$$
$$+ \sqrt{\sum_{i=1}^m (b^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i+b^i)^2}.$$

Делением на $\sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i+b^i)^2}$ приходим к неравенству

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i+b^i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^m (a^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (b^i)^2},$$

из которого искомое неравенство получается, если положить в нём

$$a^i = x^i - y^i, \quad b^i = y^i - z^i, \quad i = 1, \dots, m.$$ ◀

Непосредственно из определения (6.1) следует, что для всех $i = 1, \dots, m$

$$|x^i - y^i| \le d(x,y) \le \sqrt{m} \max_{1\le j\le m} |x^j - y^j|.$$

Это двойное неравенство показывает, что расстояние между точками мало (точки близки друг к другу) $\Leftrightarrow$ когда их координаты мало отличаются друг от друга.

Множество $\mathbb{R}^m$ и введённое на нём расстояние (6.1) образуют **метрическое пространство** $\mathbb{R}^m$.

6.2 Важнейшие классы подмножеств $\mathbb{R}^m$

Множество $B(a;\delta) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(a,x) < \delta\}$ будем называть **m-мерным шаром** с центром в точке $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса $\delta > 0$.

Определение 6.1: Подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ называется **открытым** (в $\mathbb{R}^m$), если для всякой точки $x \in U$ существует шар $B(x,\delta)$, т.ч. $B(x,\delta) \subset U$. Пустое множество $\varnothing$ считается открытым по определению.

Пример 6.1: 1) Само пространство $\mathbb{R}^m$ является открытым множеством.
2) Всякий шар $B(a,r)$ является открытым в $\mathbb{R}^m$ множеством. Действительно, если $x \in B(a,r)$, то выбирая $0 < \delta < r - \rho(a,x)$, имеем $B(x,\delta) \subset B(a,r)$,

поскольку

$$\xi \in B(x,\delta) \Rightarrow \rho(x,\xi) < \delta \Rightarrow \rho(a,\xi) \leq \rho(a,x) + \rho(x,\xi) < \rho(a,x) + (r - \rho(a,x)) = r \Rightarrow \xi \in B(a,r).$$

3) Подмножество (внешность шара)

$$\{x \in \mathbb{R}^m : \rho(a,x) > r\}$$

тоже является открытым ◀

Определение 6.2: Подмножество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым (в $\mathbb{R}^m$), если его дополнение $\mathbb{R}^m \setminus F$ является открытым в $\mathbb{R}^m$

Пример 6.2: Множество $\overline{B}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(a,x) \leq r\}$, называемое замкнутым шаром, является замкнутым в $\mathbb{R}^m$.

Замечание: Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — совокупность открытых в $\mathbb{R}^m$ множеств. Тогда

1) Объединение $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ тоже является открытым множеством. Действительно, если $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, то $x \in U_{\alpha_0}$, и в силу открытости мн-ва U_{α_0} найдётся $B(x,\delta)$, т.ч. $B(x,\delta) \subset U_{\alpha_0}$. Следовательно, шар $B(x,\delta) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

2) Пересечение $\bigcap_{i=1}^n U_i$ является открытым множеством. Действительно, если $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, то $x \in U_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, и в силу открытости U_i-х найдутся $\delta_1, \dots, \delta_n$, т.ч. $B(x,\delta_i) \subset U_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, имеем $B(x,\delta) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Пример 6.3: Сфера $S(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(a,x) = r\}$ является замкнутым множеством, поскольку её дополнение является объединением двух открытых множеств: шара $B(a,r)$ и его внешности. ◀

Определение 6.3: Окрестностью т. $x \in \mathbb{R}^m$ называется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^m$, содержащее эту точку.

Определение 6.4: Точка $x \in \mathbb{R}^m$ называется

- внутренней точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если $x \in E$ и существует окрестность $U(x) \subset E$;
- внешней точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если она является внутренней точкой дополнения $\mathbb{R}^m \setminus E$;
- граничной точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если любая окрестность $U(x)$ содержит как точки E, так и точки его дополнения $\mathbb{R}^n \setminus E$
- предельной точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если для любой окрестности $U(x)$ пересечение $U(x) \cap E$ является бесконечным множеством.

Пример 6.4: 1) Сфера $S(a,r)$ является границей как для шара $B(a,r)$, так и для замкнутого шара $\overline{B}(a,r)$.
2) Замкнутый шар $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$ состоит из всех точек, являющихся предельными для открытого шара $B(a,r)$.

Определение 6.5: Объединение множества E и всех его предельных точек точек из $\mathbb{R}^m$ называется замыканием множества E в $\mathbb{R}^m$, обозначается через $\overline{E}$.

Утверждение 6.3: Множество F замкнуто в $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ когда F содержит все свои предельные точки, т.е. $F = \overline{F}$.
Доказательство: Пусть F замкнуто и $x \in \mathbb{R}^m$: $x \notin F$. Тогда некоторая окрестность $U(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus F$ в силу открытости дополнения, т.е. $U(x)$ вообще не содержит точек множества F. Тогда x не является предельной для F.
Пусть $F = \overline{F}$. Если $x \in \mathbb{R}^m \setminus F = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$, то точка x не является предельной для F. Но тогда существует $U(x)$, которая содержит лишь конечное число точек $x_1, \dots, x_n \in F$. Точка $x \notin F$, поэтому мы можем выбрать $U_i(x)$, т.ч. $x_i \notin U_i(x)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Пересечение $\bigcap_{i=1}^n U_i(x)$ не содержит точек множества F, т.е. $\bigcap_{i=1}^n U_i(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus F$. Таким образом, дополнение $\mathbb{R}^m \setminus F$ открыто, а само F замкнуто.

Определение 6.6: Множество K называется компактом в $\mathbb{R}^m$, если из любого его покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$.

Пример 6.5: 1) Отрезок $I = \{a \le x \le b\}$ в $\mathbb{R}^1$ является компактом в силу леммы Бореля-Лебега;
2) n-мерный параллелепипед $I := \{x \in \mathbb{R}^m : a^i \le x \le b^i, i = 1, \dots, m\}$ является компактом в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 6.1: (критерий компактности в $\mathbb{R}^m$)
Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактом $\Leftrightarrow$ когда K - ограниченное, т.е. содержащееся в некотором шаре, и замкнутое в $\mathbb{R}^m$.