Лекция 7: Предел и непрерывность функции многих переменных

7.1 Предел функции

Мы будем рассматривать отображение $f: X \to \mathbb{R}^n$, определённое на $X \subset \mathbb{R}^m$ и принимающее значение в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$f(x) := \left(f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)\right).$$

Пусть либо $x_0 := (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$, либо $x_0 = \infty$ (бесконечно удалённая точка) — точка предельная для области определения X отображения f. В случае $x_0 \in \mathbb{R}^m$ окрестность $\mathcal{U}(x_0)$ — это любое открытое множество, содержащее x (например, можно положить $\mathcal{U}(x_0) := B(x_0, \delta)$); в случае бесконечно удаленной точки

$$\mathcal{U}(\infty) := \mathbb{R}^m \setminus \bar{B}(0, \delta)$$

Определение 7.1: Точка $A \in \mathbb{R}^n$ называется **предел отображения** $f: X \to \mathbb{R}^n$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(A)$ существует окрестность $\mathcal{U}(x_0)$

$$f(X \cap \mathcal{U}(x_0)) \subset V(A)$$

(т.е. для всех $x \in X \cap \mathcal{U}(x_0)$ значение $f(x) \in V(A)$).

Если $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и $A \in \mathbb{R}^n$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in X: \underbrace{\sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^m - x_0^m)^2}}_{d(x, x_0)} < \delta \Rightarrow \underbrace{\sqrt{(f^1(x) - A^1)^2 + \ldots + (f^n(x) - A^n)^2}}_{d(f(x), A)} < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$ и $A \in \mathbb{R}^n$, то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in X: \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2} > \delta \Rightarrow \sqrt{(f^1(x) - A^1)^2 + \ldots + (f^n(x) - A^n)^2} < \varepsilon.$$

Пример 7.1: Рассмотрим отображение проекции

$$\pi^i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \pi^i(x) := x^i, \quad 1 \le i \le m$$

Заметим, что для $a := (a^1, \ldots, a^m) \in \mathbb{R}^m$

$$|x^i - a^i| \le \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + \ldots + (x^m - a^m)^2} =: d(x, a), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому при $\delta = \varepsilon$ условие $d(x, a) < \delta$ влечёт $|\pi^i(x) - a^i| < \varepsilon$. Таким образом $\lim\limits_{x \to a} \pi^i(x) = a^i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. ◀

В силу оценки

$$|f^i(x) - A^i| \le d(f(x), A) \le n \max_{1 \le i \le n} |f^i(x) - A^i|, \quad i = 1, \ldots, n$$

сходимость в $\mathbb{R}^n$ является покоординатной, т.е

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \to x_0} f^i(x) = A^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Единственность, арифметические свойства предела, связь предела с неравенствами доказывается также, как и в одномерном случае.

Напомним теорему о пределе композиции

Теорема 7.1: Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}^n$, где $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^k$, — отображение, т.ч. точка x_0 является предельной для X, а точка y_0 — для Y. Тогда, если всякой $U(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ найдётся $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$, т.ч.

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(y_0),$$

и $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ существует, то композиция $g \circ f: X \to \mathbb{R}^n$ определена и имеет предел при $x \to x_0$, т.ч.

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Пример 7.2: Вычислим предел

$$\lim_{\substack{x^1 \to 0 \\ x^2 \to a}} \frac{\sin x^1 x^2}{x^1} = \lim_{\substack{x^1 \to 0 \\ x^2 \to a}} \frac{\sin x^1 x^2}{x^1 x^2} \cdot x^2 = \left(\lim_{\substack{x^1 \to 0 \\ x^2 \to a}} \frac{\sin x^1 x^2}{x^1 x^2}\right)\left(\lim_{\substack{x^1 \to 0 \\ x^2 \to a}} \pi^2(x)\right) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \left(\lim_{y \to a} \frac{\sin y}{y}\right) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

Заметим, что

$$|x^1 x^2| = |x^1((x^2 - a) + a)| \leq |x^1(x^2 - a)| + |a||x^1| \leq |x^1|^2 + |x^2 - a|^2 + |a||x^1| \leq$$

$$\leq \delta^2 + a \cdot \delta < \varepsilon, \text{ если}$$

$\delta = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varepsilon}\right)$, поэтому мы могли пользоваться теоремой 7.1 при вычислении предела ◀

7.2 Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $f: E \to \mathbb{R}^n$ — отображение, т.ч. $E \subset \mathbb{R}^m$ и т. $x_0 \in E$ — предельная для множества E (в частности, т. x_0 может быть внутренней для E)

Определение 7.2: Отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной в точке* x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^m, \text{ т.ч. } f(E \cap U(x_0)) \subset V(f(x_0))$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in E: \ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

$$(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$$

Как видно из п. 7.1 отображение $f(x) = (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m))$ непрерывно в т. x_0 $\Leftrightarrow$ когда каждая функция $f^i(x^1, \dots, x^m)$ непрерывна в т. x_0.

Теорема 7.2: 1) Если отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, то $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. f ограничено в $E \cap U(x_0)$.

2) Если отображение $g: Y \to \mathbb{R}^k$ непрерывно в т. $y_0 \in Y$, а $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^m$, непрерывно в т. $x_0 \in X$, т.ч. $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ непрерывно в т. $x_0 \in X$.

Теорема 7.3. 1) Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна в т. $x_0 \in E$ и $f(x_0) > 0$ (или $f(x_0) < 0$), то $\exists\, U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$) для $\forall x \in E \cap U(x_0)$.

2) Если функции $f: E \to \mathbb{R}$ и $g: E \to \mathbb{R}$ непрерывны в т. $x_0 \in E$, то функции $\alpha f + \beta g$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ и f/g, в случае $g(x) \neq 0$ на E, определены на E и непрерывны в точке $x_0 \in E$.

Как обычно будем говорить, что функция f **непрерывна на множестве** E, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Класс таких функций будем обозначать $C(E)$ или $C(E; \mathbb{R}^n)$.

Пример 7.3: Заметим, что функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ одного переменного x можно рассматривать как функцию $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двух переменных x, y:

$$f(x, y) = (f \circ \pi)(x, y).$$

Если f непрерывна на $\mathbb{R}$, то и как функция двух переменных она будет непрерывна, но уже на $\mathbb{R}^2$.

В силу теорем 7.2 и 7.3 функция $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + e^x$ является непрерывной на $\mathbb{R}$. ◀

Определение 7.3: **Путём** в $\mathbb{R}^m$ называется непрерывное отображение

$$\Gamma: [0;1] \to \mathbb{R}^m,$$

т.е. $\Gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$, где $x^j(t) \in C[0;1]$, $j = \overline{1,m}$.

Определение 7.4: Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется **(линейно-)связным** $\Leftrightarrow$ когда для любых $x_0, x_1 \in E$ найдётся путь $\Gamma: [0;1] \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Gamma(t) \in E$ для всех $t \in [0;1]$ и $\Gamma(0) = x_0$, $\Gamma(1) = x_1$.

Определение 7.5: **Областью** в $\mathbb{R}^m$ называется открытое и связное множество.

Пример 7.4: Шар $B(a, r)$ является областью в $\mathbb{R}^m$.

Требуется доказать связность, т.к. открытость шара мы доказали на предыдущей лекции.

Пусть $x_0, x_1 \in B(a; r)$, рассмотрим отрезок, соединяющий т. x_0, x_1, он параметризуется функциями

$$x^i(t) = t\, x_1^i + (1-t) x_0^i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

которые непрерывны на отрезке $[0;1]$. Покажем, что $x(t) \in B(a; r)$ для всех $t \in [0;1]$.

Расстояние

$$d(x(t), a) := \sqrt{\sum_{i=1}^m (x^i(t) - a^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(t(x_1^i - a^i) + (1-t)(x_0^i - a^i)\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (t(x_1^i - a^i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m ((1-t)(x_0^i - a^i))^2} \leq t\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_1^i - a^i)^2} + (1-t)\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_0^i - a^i)^2} <$$

$$< t r + (1-t) r = r. \quad ◀$$

7.3 Глобальные свойства непрерывных функций

Определение 7.6: Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на E $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x_1, x_2 \in E$: $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример 7.5: Докажем, что функция $f(x^1, x^2) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Для этого заметим, что выполняется неравенство

$$\left| \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_1^2)^2} - \sqrt{(x_2^1)^2 + (x_2^2)^2} \right| \leq d(x_1, x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Поэтому, если $d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$, то $|f(x_1^1, x_1^2) - f(x_2^1, x_2^2)| < \varepsilon$ ◀

Теорема 7.4: (Кантора) Пусть функция $f: K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда f равномерно непрерывна на K.

Теорема 7.5: (Вейерштрасса) Пусть $f \in C(K; \mathbb{R})$, где $K \subset \mathbb{R}^m$ – компакт. Тогда $f \in B(K)$ (т.е. ограничена на K). Более того, $\exists x_m, x_M \in K$, т.ч.

$$\max_K f(x) = f(x_M), \quad \min_K f(x) = f(x_m)$$

(т.е. f достигает на K наименьшего и наибольшего значений).

Теорема 7.6: Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ – связное множество, функция $f \in C(E; \mathbb{R})$, и т.ч. $f(a) = A$, $f(b) = B$ для $a, b \in E$. Тогда, если C – число, лежащее между A и B, то $\exists c \in E$, т.ч. $f(c) = C$.

Доказательство: В силу связности E существует путь $\Gamma: [0;1] \to E$, т.ч. $\Gamma(0) = a$, $\Gamma(1) = b$. Функция $f \circ \Gamma: [0;1] \to \mathbb{R}$ является непрерывной на $[0;1]$, как композиция непрерывных функций. Следовательно, существует т. $t_0 \in [0;1]$, т.ч. $(f \circ \Gamma)(t_0) = f(\Gamma(t_0)) = C$. Положив $c = \Gamma(t_0)$, имеем $c \in E$ и $f(c) = C$ ◀