Лекция 9: Основные законы дифференцирования

9.1 Арифметические операции и дифференцирования

Теорема 9.1: Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}^n$ — отображения, дифференцируемые в т. $x \in E \subset \mathbb{R}^m$. Тогда для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\lambda f + \mu g : E \to \mathbb{R}^n$ является дифференцируемой в т. x дифференцируемым отображением. Более того,

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

Доказательство: Заметим, что приращение представляется в виде

$$(\lambda f + \mu g)(x+h) - (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\big(f(x+h) - f(x)\big) + \mu\big(g(x+h) - g(x)\big) =$$

$$= /\text{в силу дифференц-ти отображений } f \text{ и } g \text{ в т. } x/ =$$

$$= \lambda\big(f'(x)h + o(h)\big) + \mu\big(g'(x)h + o(h)\big) = \big(\lambda f'(x) + \mu g'(x)\big)h + o(h).$$

Таким образом, линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ дифференцируема в т. x. Более того, мы показали, что её касательное отображение в т. x есть линейное отображение $\big(\lambda f'(x) + \mu g'(x)\big)$. ◀

Теорема 9.2: Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в т. $x \in E \subset \mathbb{R}^m$. Тогда

1) произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в т. x, причём
$$d(f \cdot g)(x) = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x);$$

2) частное f/g дифференцируемо в т. x, если $g(x) \neq 0$, причём
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}.$$

По индукции можно показать, что

$$d(f_1 \cdot \ldots \cdot f_k)(x) = f_2 \cdot \ldots \cdot f_k\, df_1(x) + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k-1}\, df_k(x).$$

Равенства из п. 1 и 2 можно переписать в виде равенств матриц Якоби

$$(f \cdot g)'(x) = g(x) f'(x) + f(x) g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}.$$

9.2 Дифференцирование композиции отображений

Теорема 9.3: Пусть $f: X \to Y$ — отображение, дифференцируемое в т. $x \in X \subset \mathbb{R}^m$, $g: Y \to \mathbb{R}^k$ — отображение, дифференцируемое в т. $y = f(x) \in Y \subset \mathbb{R}^n$. Тогда композиция $g\circ f: X \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в т. x, причём дифференциал композиции $d(g\circ f)(x): T_x\mathbb{R}^m \to T_{g(f(x))}\mathbb{R}^k$ равен композиции $dg(y)\circ df(x)$ дифференциалов

$$df(x): T_x\mathbb{R}^m \to T_y\mathbb{R}^n, \quad dg(y): T_y\mathbb{R}^n \to T_{g(y)}\mathbb{R}^k,$$

где $y = f(x)$.

Проиллюстрируем теорему в виде диаграмм

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

индуцирует отображение касательных пространств

$$\begin{tikzcd} T_x\mathbb{R}^m \arrow[r, "df(x)"] \arrow[dr, "d(g\circ f)(x)"'] & T_y\mathbb{R}^n \arrow[d, "dg(y)"] \\ & T_{g(y)}\mathbb{R}^k \end{tikzcd}.$$

Доказательство: Воспользовавшись дифференцируемостью отображений f и g, получим, что приращение композиции

$$(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(f(x))\big(f(x+h)-f(x)\big) + o(f(x+h)-f(x)) =$$

$$= g'(y)\big(f'(x)h + o(h)\big) + o(f(x+h)-f(x)) = g'(y)\big(f'(x)h\big) + g'(y)o(h) + o(f(x+h)-f(x))$$

$$= \big(dg(y)\circ df(x)\big)(h) + o(h) + o(f(x+h)-f(x)) \circeq$$

Заметим, что $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) = O(h) + o(h) = O(h)$ при $h\to 0$. Тогда $o(f(x+h)-f(x)) = o(O(h)) = o(h)$ при $h \to 0$. Поэтому

$$\circeq \big(dg(y)\circ df(x)\big)(h) + o(h).$$

Итак, мы доказали, что $d(g\circ f)(x)h = dg(y)(df(x)h)$. Проинтерпретируем это равенство в координатной форме: т.к.

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}, \quad g'(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial y^1}(y) & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial y^n}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^k}{\partial y^1}(y) & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial y^n}(y) \end{pmatrix},$$

то

$$(g\circ f)'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (g^1\circ f)}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial (g^1\circ f)}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial (g^k\circ f)}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial (g^k\circ f)}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial y^1}(y) & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial y^n}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^k}{\partial y^1}(y) & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial y^n}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial g^l}{\partial y^j}(y) \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x) \right)_{\substack{i=\overline{1,m},\\ l=\overline{1,k}}} \quad \text{или} \quad \frac{\partial (g^l\circ f)}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial g^l}{\partial y^j}(f(x))\,\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x), \quad \begin{matrix} l=\overline{1,k} \\ i=\overline{1,m} \end{matrix}.$$

Пример 9.1: Пусть $z=g(y^1,\dots,y^n)$ — функция переменных $y^1,\dots,y^n$, где каждое $y^j=f^j(x^1,\dots,x^m)$ — функция переменных $x^1,\dots,x^m$. Тогда при соблюдении условий дифференцируемости, для композиции $(g\circ f)(x):=g(f^1(x^1,\dots,x^m),\dots,f^n(x^1,\dots,x^m))$ имеем где $i=\overline{1,m}$

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}=\frac{\partial g}{\partial y^1}\cdot\frac{\partial y^1}{\partial x^i}+\dots+\frac{\partial g}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial y^n}{\partial x^i}$$ или более подробно

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x^i}(x)=\frac{\partial g}{\partial y^1}(f(x))\,\frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x)+\dots+\frac{\partial g}{\partial y^n}(f(x))\,\frac{\partial f^n}{\partial x^i}(x).$$ ◀

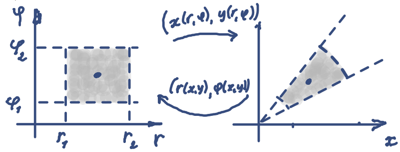
9.3 Дифференцирование обратного отображения

Теорема 9.4: Пусть $f: U(x)\to V(y)$ — отображение, где $U(x)\subset\mathbb{R}^m$ и $V(y)\subset\mathbb{R}^m$ — окрестности т. x и $y=f(x)$, соответственно. Пусть f непрерывно в т. x, существует обратное отображение $f^{-1}: V(y)\to U(x)$, непрерывное в т. x.

Тогда, если f дифференцируемо в т. x, а касательное отображение $f'(x): T_x\mathbb{R}^m\to T_y\mathbb{R}^m$ имеет обратное отображение $(f'(x))^{-1}: T_y\mathbb{R}^m\to T_x\mathbb{R}^m$, то обратное отображение $f^{-1}: V(y)\to U(x)$ дифференцируемо в т. $y=f(x)$, при этом

$$(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}.$$

Пример 9.2: Рассмотрим отображение $(x,y)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$



Матрица Якоби этого отображения

$$J=\begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi\\ y'_r & y'_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Её определитель $\det J=r$ не равен $0\Leftrightarrow r\neq 0$.

Поэтому при $r\neq0$ касательное отображение обратимо, а значит согласно Теор. 9.4

$$\begin{pmatrix} r'_x & r'_y\\ \varphi'_x & \varphi'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$ ◀