① Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+6x-1}{x^4+2x^2-3}\,dx \ominus$

Заметим, что $x^4+2x^2-3 = (x^2-1)(x^2+3)$. Тогда

$$\frac{2x^3+x^2+6x-1}{x^4+2x^2-3} = \frac{ax+b}{x^2-1} + \frac{cx+d}{x^2+3} = \frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+(3a-c)x+3b-d}{x^4+2x^2-3},$$

т.е.

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ b + d = 1 \\ 3a - c = 6 \\ 3b - d = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=0, & d=1, \\ a=2, & c=0 \end{matrix}$$

$$\ominus \int \frac{2x}{x^2-1}dx + \int\frac{dx}{x^2+3} = \int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt3} = \underline{\ln|x^2-1| + \frac{1}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt3} + C}.$$

б) $$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt2 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$
$$= \sqrt2 - \int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Откуда $2\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt2 + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_0^1$, а значит

$$\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx = \underline{\tfrac12\sqrt2 + \tfrac12\ln(1+\sqrt2)}.$$

② Вычислить несобственный интеграл.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt x}dx = x\cdot\frac{\ln x}{\sqrt x}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{\frac1x\sqrt x - \frac{\ln x}{2\sqrt x}}{x}\,dx = \lim_{x\to+0}\sqrt x\ln x -$$
$$-\int_0^1\frac{dx}{\sqrt x} + \frac12\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt x}dx = -2\sqrt x\Big|_0^1 + \frac12\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt x}dx = -2+\frac12\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt x}dx$$

Следовательно, $\underline{\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt x}dx = -4}$

(3) Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

На полуинтервале $(0;1]$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Тогда по признаку сравнения из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ мы можем заключить, что исходный интеграл сходится.

(4) Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx.$$

Заметим, что $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,x\,dx$.

1) Функция $u(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ имеет ограниченную первообразную на $(0;1]$
Действительно, $(\cos\frac{1}{x})' = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$.

2) Функция $v(x) = x$ является возрастающей на $[0;1]$, и её предел $\lim\limits_{x\to+0} x = 0$.

В силу 1) и 2) по признаку Абеля-Дирихле исходный интеграл сходится.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1-\cos\frac{2}{x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\cos\frac{2}{x}}{x}\,dx.$$

Рассуждением, аналогичном выше изложенному, можно показать, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}\,dx$$

сходится. Тогда из расходимости $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ следует и расходимость $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x}\,dx$

Тогда в силу неравенства

$$0 \le \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x} \le \frac{|\sin\frac{1}{x}|}{x}, \quad x \in (0;1]$$

по признаку сравнения интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|\sin\frac{1}{x}|}{x}\,dx$ расходится.

Таким образом, исходный интеграл сходится условно.