ЛЕКЦИЯ 1: Интегралы, зависящие от параметров

1.1 Понятие интеграла, зависящего от параметра

Под интегралом, зависящем от параметра $y \in Y$ $(Y \subseteq \mathbb{R})$, мы будем понимать функцию вида

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,$$

где $a(y)$, $b(y)$ — концы числового промежутка, которые могут зависеть от параметра y, а функция $f(x,y)$ для каждого $y \in Y$ интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на этом промежутке. Соответственно, интеграл, зависящий от параметра, может быть собственным или несобственным. Сначала мы сосредоточим внимание на первом случае.

1.2 Непрерывность собственного интеграла с параметром

ТЕОРЕМА 1.1: Пусть $P = [a;b]_x \times [c;d]_y \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый прямоугольник. Тогда, если $f(x,y) \in C(P)$, то

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\, dx$$

является непрерывной на отрезке $[c;d]$.

> **ТЕОРЕМА 16.3:** Пусть $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ — семейство функций $f_t : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда, если $f_t \in R[a,b]$ и $f_t \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $t \to t_0$, то $f \in R[a,b]$ и справедливо равенство
> $$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to t_0} \int\limits_a^b f_t(x)\, dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Заметим, что P — компакт (т.к. огранич. и замкнут.) Поэтому по теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на P:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x', y'), (x'', y'') \in P, \text{ т.ч. } (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon$$

Рассмотрим семейство функций $\varphi_y(x) := f(x,y)$ с параметром $y \in [c;d]$. Положив в последнем условии $x' = x'' = x$, взяв $y'' = y_0 \in [c,d]$, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [a,b] \text{ и } \forall y \in [c,d], \text{ т.ч. } |y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi_y(x) - \varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon,$$

т.е то, что семейство $\varphi_y(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $\varphi_{y_0}(x)$ при $y \to y_0$. Функции $\varphi_y(x)$ непрерывны на $[a,b]$ при каждом $y \in [c;d]$, поэтому функции $\varphi_y(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ при каждом $y \in [c;d]$. Тогда по теореме 16.3 (из предыдущего семестра)

$$F(y_0) = \int\limits_a^b f(x,y_0)\, dx = \int\limits_a^b \varphi_{y_0}(x)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} \varphi_y(x)\, dx \overset{\substack{\text{работает} \\ \text{Thm. 16.3}}}{=} \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b \varphi_y(x)\, dx =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\, dx = \lim_{y \to y_0} F(y),$$

т.е. $F(y)$ непрерывна в произвольной т. $y_0 \in [c;d]$. ◀

1.3 Дифференцируемость собственного интеграла с параметром

ТЕОРЕМА 1.2: (формула Лейбница) Пусть функция $f(x,y) \in C(P)$ (P как в теореме 1.1), частная производная $f'_y(x,y) \in C(P)$. Тогда

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c;d]$, и

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для $y_0, y_0+h \in [c;d]$ рассмотрим

$$\left|F(y_0+h) - F(y_0) - \left(\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx\right)h\right| = \left|\int_a^b \left(f(x,y_0+h) - f(y_0) - f'_y(x,y_0)h\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_a^b \left|f(x,y_0+h) - f(y_0) - f'_y(x,y_0)h\right|dx}_{\text{теорема о конечн. приращении}} = \int_a^b \Big|\underbrace{f'_y(x, y_0+\theta h)}_{\text{здесь } 0<\theta<1} - f'_y(x,y_0)\Big|\,|h|\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b \sup_{0<\theta<1} \left|f'_y(x, y_0+\theta h) - f'_y(x,y_0)\right|dx\right)|h| = \alpha(y_0,h)\,|h|$$

По условию $f'_y \in C(P)$, поэтому $f'_y(x,y) \rightrightarrows f'_y(x,y_0)$ на $[a;b]$ при $y \to y_0$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in[a,b] \text{ и } \forall y\in[c;d], \text{ т.ч. } |y-y_0|<\delta \Rightarrow \left|f'_y(x,y) - f'_y(x,y_0)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\alpha(y_0,h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно,

$$F(y_0+h) - F(y_0) = \left(\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx\right)h + o(h),$$

т.е. $F(y)$ дифференцируема в т. y_0, а коэффициент при h в правой части и есть производная в т. y_0. ◀

ПРИМЕР: Вычислим с помощью формулы Лейбница интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi \qquad (\alpha>1)$$

Легко видеть, что

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\,d\varphi}{\alpha^2 - \sin^2\varphi} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\,d\varphi}{(\alpha^2-1)\sin^2\varphi + \alpha^2\cos^2\varphi} = \big/ t = \operatorname{tg}\varphi \big/ = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha\,dt}{(\alpha^2-1)t^2+\alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha\, d(\sqrt{\alpha^2-1}\,t)}{(\alpha^2-1)t^2+\alpha^2} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{1}{\alpha}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha^2-1}\,t}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Тогда, решая дифференциальное уравнение $\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, находим, что

$$F(\alpha) = \pi\ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right) + C$$

При $\alpha \to +\infty$, $F(\alpha) = \pi\ln(2\alpha) + C + o(1) = \pi\ln\alpha + \pi\ln 2 + o(1)$ (т.к. $\alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \sim 2\alpha$ при $\alpha\to+\infty$)

С другой стороны, из определения $F(\alpha)$ следует, что при $\alpha\to+\infty$

$$F(\alpha) = 2\ln\alpha\cdot\frac{\pi}{2} + o(1) = \pi\ln\alpha + o(1).$$

Тогда $C = -\pi\ln 2$, а $F(\alpha) = \pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$. ◀

Следствие: Пусть f как в условиях теоремы 1.2, а функции $a(y), b(y) \in C^1[c;d]$, т.ч. $a \le a(y) \le b$ и $a \le b(y) \le b$ для всех $y \in [c;d]$. Тогда интеграл

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

лежит в классе $C^1[c;d]$, и его производная

$$F'(y) = f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\,a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство: Рассмотрим функцию трёх переменных

$$\Phi(\alpha,\beta,y) := \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx.$$

Её частные производные при условии, что $\alpha,\beta \in [a;b]$ и $y\in[c;d]$, равны

$$\Phi'_\alpha = -f(\alpha,y), \quad \Phi'_\beta = f(\beta,y), \quad \Phi'_y = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)dx.$$

(как от интеграла с переменным нижним пределом) (как от интеграла с переменным верхн. пределом) (теорема 1.2)

Все частные производные непрерывны на области определения функции Φ, поэтому сама Φ является непрерывно дифференцируемой. Тогда искомая производная получается из формулы полной производной:

$$F'(y) = \left(\Phi(a(y), b(y), y)\right)'_y = \Phi'_\alpha(a(y), b(y), y)\cdot a'(y) + \Phi'_\beta(a(y), b(y), y)\cdot b'(y) +$$

$$+ \Phi'_y(a(y), b(y), y) = -f(a(y),y)\,a'(y) + f(b(y),y)\cdot b'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx.$$

1.4 Интегрирование собственного интеграла с параметром

Теорема 1.3: Пусть f непрерывна на прямоугольнике $P = [a;b]_x \times [c;d]_y$. Тогда интеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

является интегрируемой на $[c;d]$ функцией, и

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Доказательство: Рассмотрим функции

$$\varphi(u) = \int_c^u \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy, \quad \psi(u) = \int_a^b\left(\int_c^u f(x,y)dy\right)dx.$$

Функция $F(y)$ непрерывна на $[c;d]$ по теореме 1.1 в силу непрерывности f на P. Тогда $\varphi(u)$ непрерывно диф-ма на $[c;d]$ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Аналогично получается, что $\psi \in C^1[c;d]$. Заметим, что

$$\varphi'(u) = \int_a^b f(x,u)\,dx, \quad \psi'(u) = \int_a^b\left(\frac{d}{du}\left(\int_c^u f(x,y)dy\right)\right)dx \overset{\text{следствие}}{=} \int_a^b f(x,u)dx.$$

Таким образом, $\varphi'(u) = \psi'(u)$ на $[c;d]$, поэтому $\varphi(u) = \psi(u) + Const$ на $[c;d]$. Замечая, что $\varphi(c) = \psi(c) = 0$, получаем $\varphi(u) = \psi(u)$ на $[c;d]$, при $u=d$ имеем искомое равенство