Лекция №10

10.1 Поверхности в $\mathbb{R}^n$

Заметим, что интервал $I^1 = (-1;1)$ может быть гомеоморфно преобразован в $\mathbb{R}^1$ с помощью функции $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t$. Аналогично открытый k-мерный куб
$$I^k := \{ t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : \ |t^i| < 1, \ i = 1, \dots, k\}$$
гомеоморфен $\mathbb{R}^k$.

Определение 10.1: Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью* $\Leftrightarrow$ когда для всякой точки $p \in S$ найдутся окрестность U этой точки в S и гомеоморфизм
$$\varphi : I^k \to U$$
Отображение φ называется *(локальной) картой поверхности* S, окрестность U называется *областью действия карты на поверхности* S.

Локальная карта φ вводит в U криволинейные координаты: точке $x = \varphi(t) \in U$ сопоставляется числовой набор $t = (t^1, \dots, t^k) \in I^k$.

Если поверхность можно задать только одной локальной картой, то она называется *элементарной*. Примером элементарной поверхности является график непрерывной функции $f : I^k \to \mathbb{R}$.

Определение 10.2: Набор $A(S) = \{ \varphi_i : I_i^k \to U_i, \ i \in \mathbb{N}\}$ локальных карт поверхности S, т.ч. $S = \bigcup_i U_i$, называется *атласом поверхности* S.

Определение 10.3: Поверхность S размерности k в $\mathbb{R}^n$ называется *$C^{(m)}$-гладкой, $m \geq 1$*, если на ней можно ввести атлас $A(S)$, т.ч. все $\varphi_i \in C^{(m)}(I^k)$, $m \geq 1$ и все φ_i в каждой точке своего определения имеют ранг k.

Пример 10.1 Если $F^i \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n-k$ — такие, что система
$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$
в любой точке множества S всех своих решений имеет ранг $n-k$, то либо $S = \varnothing$, либо S — k-мерная $C^{(m)}$-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$.

► Пусть $S \neq \varnothing$ и $x_0 \in S$. По теореме о неявной функции (с точностью до переобозначений) система эквивалентна
$$\begin{cases} x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \dots, x^k) \\ \dots \\ x^n = f^n(x^1, \dots, x^k), \end{cases}$$
где $f^{k+1}, \dots, f^n \in C^{(m)}$.

Её можно переписать в виде отображения

$$x^1 = \tau^1, \ \dots, \ x^k = \tau^k, \ \ x^{k+1} = f^{k+1}(\tau^1, \dots, \tau^k), \dots, x^n = f^n(\tau^1, \dots, \tau^k),$$

который после композиции с $\tau^j = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} t^j$, $j = 1, \dots, k$, даёт локальную карту $\varphi_{x_0} : I^k_{x_0} \to U(x_0)$, где $U(x_0)$ – некоторая окрестность т. x_0 на S. ◀

Пример 10.2: Рассмотрим уравнение сферы S в $\mathbb{R}^n$:

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2.$$

Очевидно, что в точках S ранг системы равен 1, т.к. градиент

$$(2x_0^1, \dots, 2x_0^n) \neq 0$$

для точек $x_0 \in S$. Следовательно, сфера является $(n-1)$-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

10.2 Ориентация поверхности

Ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$ — это пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным в нём репером или с фиксированной СК.

Напомним, что для диффеоморфизма $\varphi : D \to G$ областей D и G, лежащих в экземплярах $\mathbb{R}^n$ с координатами $t = (t^1, \dots, t^n)$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$, возникает отображение касательных пространств

$$\varphi'(t) : \ T_t D \to T_x G$$
$$\varphi'(t) : \ e \mapsto \varphi'(t) e.$$

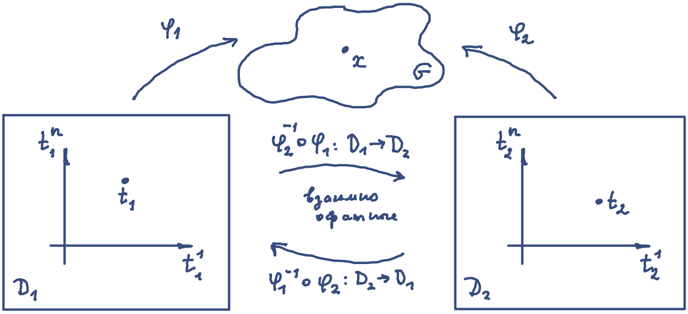
Репер $e_1, \dots, e_n$ в $T_t D$ переводится этим отображением в репер из $T_x G$:

$$\xi_1 := \varphi'(t) e_1, \ \dots, \ \xi_n := \varphi'(t) e_n.$$

Непрерывное векторное поле $e(t)$ под его действием переходит в непрерывное векторное поле $\xi(x) = \xi(\varphi(t)) = \varphi'(t) e(t)$ поскольку $\varphi \in C^{(1)}(D; G)$.

Таким образом, непрерывное семейство $e_1(t), \dots, e_n(t)$ из $T_t D$ в непрерывное семейство $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ реперов в $T_x G$.

Рассмотрим теперь пару диффеоморфизмов $\varphi_i : D_i \to G$, $i = 1, 2$.

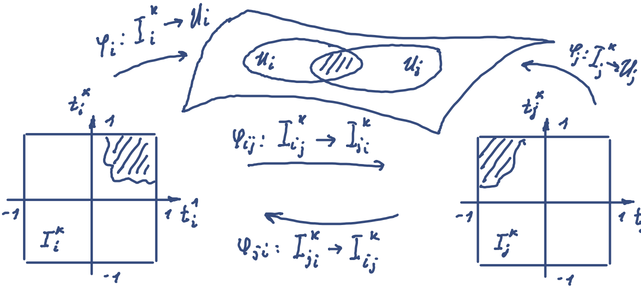


Очевидно, что $\left(\det (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'(t_1)\right)\left(\det (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)'(t_2)\right) > 0$ (т.е. якобианы имеют один и тот же знак). В силу связности знаки совпадают во всех точках D_1 и D_2.

Возникают классы ориентации СКК в области G: в один класс попадают те СКК, взаимные преобразования которых осуществляются с положительным якобианом. Задание ориентации в области G — это фиксация в G класса ориентации систем её криволинейных координат. Равносильно можно задать ориентацию в G, фиксировав непрерывное семейство реперов в G. Ориентация G вполне определится, если хотя бы в одной т. $x_0 \in G$ указать репер, ориентирующий $T_{x_0}G$: надо сравнить этот репер с репером в $T_{x_0}G$, индуцированным СКК $\varphi: D \to G$.

Если вместо области $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотреть элементарную гладкую k-мерную поверхность S в $\mathbb{R}^n$, то получим, что СКК поверхности S разбиваются на два класса ориентации в соответствии со знаком якобиана преобразований их взаимного перехода; задать ориентацию поверхности S можно ориентирующим репером в $T_{x_0}S$.

Рассмотрим теперь случай произвольной гладкой поверхностности S размерности k.



Здесь, $I_{ij}^k = \varphi^{-1}(U_i \cap U_j)$, $I_{ji}^k = \varphi^{-1}(U_i \cap U_j)$.

Определение 10.4: Две локальные карты $\varphi_i: I_i^k \to U_i$, $\varphi_j: I_j^k \to U_j$ поверхности S называют согласованными, либо когда $U_i \cap U_j = \varnothing$, либо когда $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, а $\det \varphi'_{ij} > 0$, $\det \varphi'_{ji} > 0$.

Определение 10.5: Атлас поверхности, состоящий из попарно согласованных карт, называется ориентирующим атласом.

Определение 10.6: Поверхность, обладающая ориентирующим атласом, называется ориентируемой. В ином случае, поверхность — неориентируемой.

Утверждение 10.1: На ориентируемой связной поверхности существуют точно две ориентации (противоположные ориентации).

Пусть S — ориентируемая $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в $\mathbb{R}^n$ с фиксированным ориентирующим репером $e_1, \dots, e_n$. Пусть $T_x S$ — $(n-1)$-мерная касательная к S в точке $x \in S$ плоскость, n — вектор нормали к поверхности S в точке x. Если репер $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ в $T_x S$ выбрать так, чтобы репер $e_1, \dots, e_n$ и $n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ принадлежали одному классу ориентации пространства $\mathbb{R}^n$, то все реперы $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ окажутся в одном классе ориентации плоскости $T_x S$. Значит задание ориентации на связной ориентируемой поверхности можно осуществить, задав нормальный вектор n. Более того, ориентируемость $(n-1)$-мерной поверхности, лежащей в $\mathbb{R}^n$, эквивалентна наличию на ней непрерывного поля ненулевых нормальных векторов (двусторонние поверхности).

10.3 Поверхность с краем

Обозначим

$$I_H^k := \{t \in \mathbb{R}^k : t^1 \le 0,\ |t^i| < 1,\ i = 2, \dots, k\},$$

$$\partial I_H^k := \{t \in \mathbb{R}^k : t^1 = 0,\ |t^i| < 1,\ i = 2, \dots, k\}.$$

Определение 10.7: Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхностью с краем, если всякая точка $x \in S$ имеет окрестность U в S гомеоморфную либо I^k, либо I_H^k. Если в последнем случае точке x соответствует точка ∂I_H^k, то x называется точкой края поверхности S. Совокупность всех точек края ∂S называется краем поверхности S.

Утверждение 10.2: Край k-мерной поверхности класса $C^{(m)}$ является поверхностью без края того же класса гладкости размерности $k-1$.

Пример 10.3: Замкнутый n-мерный шар $\bar{B}_n$ в $\mathbb{R}^n$ — n-мерная поверхность с краем. Её край $\partial \bar{B}_n$ — $(n-1)$-мерная с

Определение 10.8: Если $A(S) = \{(I^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(I_H^k, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас поверхности S, то $A(\partial S) = \{(I^{k-1}, \varphi|_{\partial I_H^k}, \partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края. Заданная таким образом ориентация края ∂S называется ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности.

Замечание 10.1: Пусть $T_{x_0}S$ – k-мерная касательная плоскость к гладкой поверхности S в точке $x_0 \in \partial S$. Поскольку локально структура S около x_0 такая же, как и структура I_H^k около точки $0 \in \partial I_H^k$, то, направив первый вектор ориентирующего S репера $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in T_{x_0}S$ по нормали к ∂S и в сторону внешнюю по отношению к локальной проекции S на $T_{x_0}S$, получаем в $(k-1)$-мерной плоскости $T_{x_0}\partial S$, касательной к ∂S в точке x_0, репер $\xi_2, \dots, \xi_k$, задающий ориентацию $T_{x_0}\partial S$, а значит и ∂S, согласованную с заданной репером $\xi_1, \dots \xi_k$ ориентацией поверхности S

Определение 10.9: Точка – это нульмерная поверхность любого класса гладкости.

Кусочно гладкая одномерная поверхность (кривая) – это подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое после удаления из него конечного или счетного числа некоторых нульмерных поверхностей (точек) распадается на гладкие одномерные поверхности (кривые).

Кусочно гладкая k-мерная поверхность – это подмножество в $\mathbb{R}^n$, из которого можно удалить конечное или счётное число кусочно гладких поверхностей размерности не выше $k-1$ так, что остаток распадается на гладкие k-мерные поверхности S_i (с краем или без края).