Лекция №10

10.1 Поверхности в $\mathbb{R}^n$

Заметим, что интервал $I^1=(-1;1)$ может быть гомеоморфно преобразован в $\mathbb{R}^1$ с помощью функции $x=tg\frac{\pi}{2}t$. Аналогично открытый k-мерный куб
$$I^k := \{t=(t^1,\dots,t^k)\in\mathbb{R}^k: \ |t^i|<1, \ i=1,\dots,k\}$$
гомеоморфен $\mathbb{R}^k$.

Определение 10.1: Подмножество $S\subset\mathbb{R}^n$ называется k-мерной поверхностью $\Leftrightarrow$ когда для важной точки $p\in S$ найдутся окрестность U этой точки в S и гомеоморфизм
$$\varphi: I^k\to U$$
Отображение φ называется (локальной) картой поверхности S, окрестность U называется областью действия карты на поверхности S.

Локальная карта φ вводит в U криволинейные координаты: точке $x=\varphi(t)\in U$ сопоставляется числовой набор $t=(t^1,\dots,t^k)\in I^k$.

Если поверхность можно задать только одной локальной картой, то она называется элементарной. Примером элементарной поверхности является графики непрерывной функции $f: I^k\to\mathbb{R}$.

Определение 10.2: Набор $A(S)=\{\varphi_i: I_i^k\to U_i, \ i\in\mathbb{N}\}$ локальных карт поверхности S, т.ч. $S=\bigcup_i U_i$, называется атласом поверхности S.

Определение 10.3: Поверхность S размерности k в $\mathbb{R}^n$ называется $C^{(m)}$-гладкой, $m\geq 1$, если на ней можно ввести атлас $A(S)$, т.ч. все $\varphi_i\in C^{(m)}(I^k)$, $m\geq 1$ и все φ_i в каждой точке своего определения имеют ранг k.

Пример 10.1 Если $F^i\in C^{(m)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $i=1,\dots,n-k$ — такие, что система
$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^k,x^{k+1},\dots,x^n)=0,\\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^k,x^{k+1},\dots,x^n)=0,\end{cases}$$
в любой точке множества S всех своих решений имеет ранг $n-k$, то либо $S=\varnothing$, либо S - k-мерная $C^{(m)}$-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$.

► Пусть $S\neq\varnothing$ и $x_0\in S$. По теореме о неявной функции (с точностью до переобозначений) система эквивалентна
$$\begin{cases} x^{k+1}=f^{k+1}(x^1,\dots,x^k)\\ \dots\\ x^n \ = f^n(x^1,\dots,x^k),\end{cases}$$
где $f^{k+1},\dots,f^n\in C^{(m)}$.

Её можно переписать в виде отображения

$$x^1 = \tau^1, \dots, x^k = \tau^k, \quad x^{k+1} = f^{k+1}(\tau^1, \dots, \tau^k), \dots, x^n = f^n(\tau^1, \dots, \tau^k),$$

который после композиции с $\tau^j = tg \frac{\pi}{2} t^j$, $j = 1, \dots, k$, даёт локальную карту $\varphi_{x_0}: I^k_{x_0} \to U(x_0)$, где $U(x_0)$ – некоторая окрестность т. x_0 на S. ◀

Пример 10.2: Рассмотрим уравнение сферы S в $\mathbb{R}^n$:

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2.$$

Очевидно, что в точках S ранг системы равен 1, т.к. градиент

$$(2x_0^1, \dots, 2x_0^n) \neq 0$$

для точек $x_0 \in S$. Следовательно, сфера является $(n-1)$-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

10.2 Ориентация поверхности

Ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$ – это пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным в нём репером или с фиксированной СК.

Напомним, что для диффеоморфизма $\varphi: D \to G$ областей D и G, лежащих в экземплярах $\mathbb{R}^n$ с координатами $t = (t^1, \dots, t^n)$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$, возникает отображение касательных пространств

$$\varphi'(t): T_t D \to T_x G$$

$$\varphi'(t): \quad e \mapsto \varphi'(t) e.$$

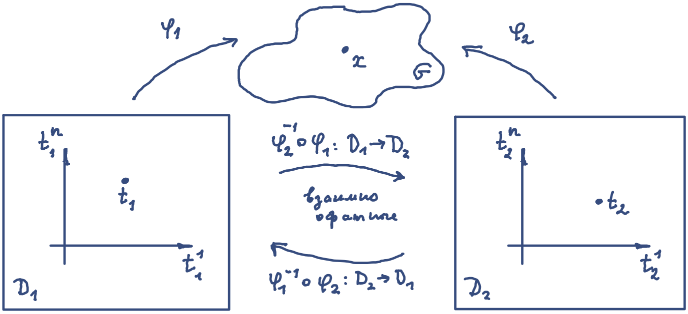
Репер $e_1, \dots, e_n$ в $T_t D$ переводится этим отображением в репер из $T_x G$:

$$\xi_1 := \varphi'(t) e_1, \dots, \xi_n := \varphi'(t) e_n.$$

Непрерывное векторное поле $e(t)$ под его действием переходит в непрерывное векторное поле $\xi(x) = \xi(\varphi(t)) = \varphi'(t) e(t)$ поскольку $\varphi \in C^{(1)}(D; G)$.

Таким образом, непрерывное семейство $e_1(t), \dots, e_n(t)$ из $T_t D$ в непрерывное семейство $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ реперов в $T_x G$.

Рассмотрим теперь пару диффеоморфизмов $\varphi_i: D_i \to G$, $i = 1, 2$.



Очевидно, что $\left(\det (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'(t_1)\right)\left(\det (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)'(t_2)\right) > 0$ (т.е. якобианы имеют один и тот же знак). В силу связности знаки совпадают во всех точках D_1 и D_2.

Возникают классы ориентации СКК в области G: в один класс попадают те СКК, взаимные преобразования которых осуществляются с положительным якобианом. Задание ориентации в области G — это фиксация в G класса ориентации систем её криволинейных координат. Равносильно можно задать ориентацию в G, фиксировав непрерывное семейство реперов в G. Ориентация G вполне определится, если хотя бы в одной т. $x_0 \in G$ указать репер, ориентирующий $T_{x_0}G$: надо сравнить этот репер с репером в $T_{x_0}G$, индуцированным СКК $\varphi: D \to G$.